UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
Institut de Mathématiques de Bourgogne
Ecole doctorale Carnot-Pasteur

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Discipline : **Mathématiques**

Présentée par **Charlie PETITJEAN**

le 30 mars 2015

Actions hyperboliques du groupe multiplicatif sur des variétés affines : espaces exotiques et structures locales

Jury composé de :

Jérémy BLANC	Université de Basel	Examinateur
Adrien DUBOULOZ	Université de Dijon	Directeur de thèse
Stéphane LAMY	Université Paul Sabatier - Toulouse	Rapporteur
Alvaro LIENDO	Université de Talca	Rapporteur
Lucy MOSER-JAUSLIN	Université de Dijon	Directrice de thèse

Résumé :

Cette thèse est consacré à l'étude des $\mathbb{T}$-variétés affines à l'aide de la présentation due à Altmann et Hausen. On s'intéresse plus particulièrement au cas des actions hyperboliques du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Dans une première partie, on étudie les espaces affines exotiques, c'est-à-dire des variétés affines lisses et contractiles, en supposant de plus qu'elles sont munies d'une action de $\mathbb{G}_m$. En particulier, dans le cas de dimension 3, on réinterprète la construction des variétés de Koras-Russell en terme de diviseurs polyédraux, et on donne des constructions de variétés affines lisses et contractiles en dimension supérieure à 3.

Dans une deuxième partie, on introduit la propriété pour une G-variété d'être G-uniformément rationnelle, c'est-à-dire que tout point de cette variété admet un voisinage ouvert G-stable, qui est isomorphe de manière equivariante à un ouvert G-invariant de l'espace affine. En particulier, on exhibera des $\mathbb{G}_m$-variétés qui sont lisses et rationnelles mais qui ne sont pas $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelle.

Abstract :

This thesis is devoted to the study of affine $\mathbb{T}$-varieties using the Altmann-Hausen presentation. We are especially interested in the case of hyperbolic actions of the multiplicative group $\mathbb{G}_m$. In the first part, exotic affine spaces are studied, that is, smooth contractible affine varieties, assuming in addition that they are endowed with a $\mathbb{G}_m$-action. In particular, in the case of dimension 3, we reinterpret the construction of Koras-Russell threefolds in terms of polyhedral divisors and we give constructions of smooth contractible affine varieties and in dimensions larger than 3.

In the second part we consider the property of G-uniform rationality for a G-variety. This means that every point of this variety there exists an open G-stable neighborhood, which is equivariantly somorphic to a G-stable open subset of the affine space. In particular we will exhibit $\mathbb{G}_m$-varieties which are smooth and rational but not $\mathbb{G}_m$-uniformly rational.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont instruit, pas seulement durant les dernières années mais aussi durant tout mon parcours tant mathématiques que extra-mathématiques.

En premier mes remerciements vont à mes deux directeurs Lucy Moser-Jauslin et Adrien Dubouloz. Ils ont su se montrer patients, attentifs et disponibles pour répondre a chacune de mes questions et orienter mes recherches pour aboutir à l'écriture de cette thèse. Ils ne m'ont pas seulement encadré durant ma période de "thèsard" mais aussi durant mon master. Je pense sincèrement que ils forment un excellent binôme, très complémentaire.

Stéphane Lamy et Alvaro Liendo m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse et de participer au jury, un grand merci à eux deux. Alvaro Liendo a de plus passé du temps à relire et corriger mon premier article. Je remercie Jérémy Blanc non seulement pour sa participation au jury, mais aussi pour l'aide précieuse qu'il a apporté à la partie géométrie birationnelle de cette thèse en répondant à mes questions.

Grâce aux membres l'ANR "Birpol", j'ai pu donner mes premiers exposés de recherche et m'enrichir de nombreuses rencontres qu'ils ont organisées. Je remercie donc l'ensemble des membres de cette ANR mais aussi toute les personnes qui gravitent autours tels que Karol Palka, les doctorants bâlois et d'ailleurs, les anciens doctorants Kevin, Karine, Ronan etc.

J'ai travaillé dans de très bonne conditions au seins de l'Institut Mathématiques de Bourgogne c'est grâce notamment aux personnels administratifs. Je remercie donc Anissa, Caroline, Ibtissam, Magalie et Nadia. De même merci à Pierre pour avoir toujours trouvé les articles demandés et à Francis toujours prompt à aider.

Ces années n'ont pas seulement été des années de recherche mais aussi d'enseignement à l'ESIREM, à l'IUT. J'ai toujours trouvé des personnes qui ont su répondre à mes interrogations et me conseiller que ce soit dans leurs bureaux ou bien aux pauses café quotidiennes, merci à tous.

Les doctorants dijonnais, bref la DMD, entre les pots et les séminaires ça fonctionne bien je trouve, merci à tous. Merci aux anciens : Sébastien, Lionel et

Vincent de nous avoir lancés sur des bons rails. Une pensée particulière pour mes co-bureaux présents et passés : Simone, Maya, Bachar, Jesse, Antoine, Muhammad. Merci aussi a Ben et Olivier de gérer la DMD avec moi.

Je remercie tous mes amis qui m'ont permis de me détendre et de m'amuser au long de ces 8 années à Dijon, merci aux amis du rugby, aux amis rencontrés durant mes années de Licence et Master (en particulier : Nico, Adrien et Juju), et merci aussi à ceux que je connais depuis bien plus longtemps voir depuis toujours.

Je remercie ma famille, je me suis toujours senti soutenu, appuyé dans mes choix, j'espère vous rendre fière puisque c'est grâce à vous aussi que j'en suis là.

Pour terminer ces remerciements : merci mille fois à Julie d'être présente aujourd'hui et depuis le début.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse, on va étudier des variétés algébriques affines munies d'action d'un tore. On cherchera à déterminer quelles propriétés topologiques sont identifiables à partir de leur structure de $\mathbb{T}$-variétés. Afin de réaliser cette étude, on donnera une présentation particulière des $\mathbb{T}$-variétés.

Pour illustrer cette présentation on va la réaliser sur un exemple particulier, puis on explicitera la présentation générale.

On considère la $\mathbb{G}_m$-variété $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ munie d'une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ donnée par l'action sur les générateurs de l'algèbre des fonctions régulières : $\lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$.

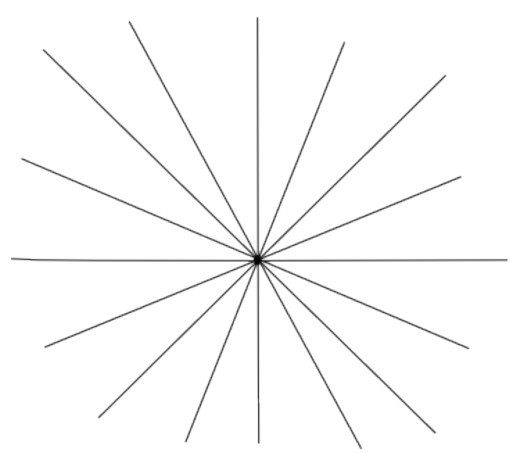
En notant $A = \mathbb{C}[x,y]$, on a alors une $\mathbb{Z}$-graduation, correspondant à la graduation usuelle, de l'anneau $A = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} A_m$ avec :

i) $A_0 = \mathbb{C}$.

ii) $A_n = 0$ si $n < 0$.

iii) $A_n = \mathbb{C}[x,y]_n$ l'ensemble des polynômes homogènes de degrés n si $n > 0$.

On a de plus $\mathbb{A}^2/\!/\mathbb{G}_m \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{G}_m}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.



Il est naturel de considérer $\mathbb{P}^1$ comme l'espace paramétrant les orbites générales de cette $\mathbb{G}_m$-variété. L'unique orbite fermée est le point fixe $(0,0)$, les autres orbites forment un pinceau de droites passant par l'origine, privées de cette origine. L'ensemble A_n des polynômes homogènes de degrés n en x et y s'identifiant de manière naturelle à $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, on conclut que l'on peut reconstituer l'algèbre graduée (donc de manière équivalente $\mathbb{A}^2$ muni de l'action considérée) à partir de la simple donnée de "l'espace d'orbite" $\mathbb{P}^1$ et d'un diviseur sur ce quotient par exemple le point $[0:1]$. En effet on a $A_n = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ on obtient ainsi un isomorphisme entre algèbres graduées en degrés positifs, A est isomorphe à $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ et donc $\mathbb{A}^2$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathrm{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)))$.

Plus généralement, on considère une variété Y et un diviseur D sur celle-ci. On peut de la même manière considérer les sections globales de D et de ses multiples, $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(nD))$. Alors, sous de bonnes conditions garantissant que la somme directe, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(nD))$ est une algèbre graduée de type finie, on peut prendre le spectre de cette algèbre et ainsi obtenir une variété affine munie d'une action de $\mathbb{G}_m$ [D, F-Z1]. On remarque que cette construction permet de générer des algèbres graduées uniquement en degrés positifs. Ainsi pour construire des algèbres $\mathbb{Z}$-graduée il faut considérer Y une variété et une paire de diviseurs (D_+, D_-) sur Y, l'un pour encoder la partie positive de l'algèbre et l'autre la partie négative. Sous de bonnes conditions sur Y, D_+ et D_-, on a alors une algèbre de type finie $\mathbb{Z}$-graduée :

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{<0}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(mD_-)) \bigoplus \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{>0}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(mD_+)).$$

Ainsi le spectre de cette algèbre va coïncider avec une variété X munie d'une action de $\mathbb{G}_m$. X est isomorphe de manière équivariante à :

$$\mathrm{Spec}(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{<0}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(mD_-)) \bigoplus \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{>0}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(mD_+))).$$

Chaque $\mathbb{G}_m$-variété affine est réalisable de cette manière.

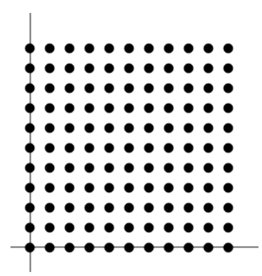
D'autre part, si on considère maintenant une variété torique X de dimension n, c'est à dire, une variété contenant comme ouvert dense, un tore algébrique $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{G}_m)^n$. Dans ce cas, le quotient n'apporte pas d'informations puisqu'il est réduit à un point. Quant à l'anneau des fonctions régulières de la variété, il est muni d'une $\mathbb{Z}^n$-graduation induite par l'action de $\mathbb{T}$ sur X. Une manière purement combinatoire d'encoder toute l'information concernant X est de considérer un cône convexe dans un réseau de taille n [C-L-Sc, Fu, O]. De manière analogue au cas des actions de $\mathbb{G}_m$ sur des variétés affines, illustrons ce cas.

Exemple. Soit $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ muni d'une action de $(\mathbb{G}_m)^2$ donnée par $(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (x,y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$.

En notant $A = \mathbb{C}[x,y]$, on a alors une $\mathbb{Z}^2$-graduation de A avec
$A = \bigoplus_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} A_{(m_1,m_2)}$:

i) $A_0 = \mathbb{C}$.
ii) $A_{(m_1,m_2)} = 0$ si $m_1 < 0$ ou $m_2 < 0$.
iii) $A_{(m_1,m_2)}$ correspond au A_0-module généré par $\langle x^{m_1} y^{m_2}\rangle$ si $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$.

Alors on considère le réseau $M = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et le cône $\sigma^\vee$ tel que $\sigma^\vee \cap M$ soit généré par (e_1, e_2).



$\sigma^\vee \cap M$

On a ainsi un semi-groupe $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ engendré par deux générateurs indépendants. On obtient alors une algèbre $\mathbb{C}[S_\sigma]$, que l'on peut munir de la graduation induite par le réseau M, et de type fini, $\mathbb{C}[S_\sigma] = \bigoplus_{u\in S_\sigma} \mathbb{C}\cdot u$. Il existe un isomorphisme évident entre $\mathbb{C}[S_\sigma] = \bigoplus_{u\in S_\sigma} \mathbb{C}\cdot u$ et $A = \bigoplus_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} A_{(m_1,m_2)}$ ce qui donne $\mathbb{A}^2 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$.

On vient d'illustrer deux constructions pour des $\mathbb{T}$-variétés avec des tores de dimensions minimale (action de $\mathbb{G}_m$) et maximale (variétés toriques), on peut alors étudier les cas général d'une $\mathbb{T}$-variété en effectuant la réunion de ces deux constructions.

La théorie généralisant ces deux constructions est due à Altmann et Hausen [A-H]. On considère une variété Y et un diviseur $\mathcal{D}$ dont les coefficients sont des polyèdres dans un réseau. Alors la donnée de Y et du diviseur $\mathcal{D}$ nous permet de considérer une algèbre graduée qui sous de bonnes hypothèses est une algèbre de type fini. Ainsi le spectre de cette algèbre graduée nous donne une variété affine avec une action d'un tore $\mathbb{T}$ de même dimension que celle du réseau. Réciproquement, toutes les $\mathbb{T}$-variétés admettent une décomposition sous cette forme.

La théorie Altmann-Hausen nous permet de construire un dictionnaire :

$$(Y, \mathcal{D}) \leftrightsquigarrow X \textit{ et une action de } \mathbb{T} \textit{ sur } X.$$

Un des objectifs est de déterminer sous quelles conditions sur le couple $(Y, \mathcal{D})$ une $\mathbb{G}_m$-variété est un espace exotique, c'est à dire, une variété affine lisse de dimension d difféomorphe à l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^{2d}$ mais non isomorphe à $\mathbb{A}^d$. On va considérer le cas le plus simple possible. D'après un résultat de Ramanujan [Ra], il n'existe pas de surface exotique. On se place donc dans un premier temps en dimension 3 avec des variétés munies d'action de $\mathbb{G}_m$ hyperbolique, c'est à dire, tel que leur algèbre des fonctions régulières soit graduée en degrés positifs et négatifs.

L'ensemble des espaces exotiques de dimension 3, munis d'actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ a été classifié par Koras et Russell [K-R], et ce comme étape dans la démonstration de la linéarisation des actions de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$. L'ensemble des variétés ainsi construites correspondent aux variétés de Koras-Russell.

La plus connue de ces variétés est la cubique de Russell, réalisable comme hypersurface de $\mathbb{A}^4$ et donnée par l'équation :

$$\{x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]).$$

Elle admet une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$: $\lambda \cdot (x, y, z, t) \to (\lambda^6 x, \lambda^{-6} y, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$.

Donnons deux constructions possibles de la cubique de Russell.

<u>La cubique de Russell construite comme recouvrement bicyclique équivariant de $\mathbb{A}^3$ [K-R] :</u>

On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z])$ muni de l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x, y, z) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda z)$.

On effectue un recouvrement cyclique d'ordre 3 le long du diviseur $\{z + x^2y + x = 0\}$ stable pour l'action de $\mathbb{G}_m$. On obtient ainsi $V = \{x + x^2y + z + t^3 = 0\} \subset$

$\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t])$ isomorphe à $\mathbb{A}^3$ et munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par l'action linéaire suivante sur $\mathbb{A}^4$: $\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^3 x, \lambda^{-3} y, \lambda^3 z, \lambda t)$.

On effectue un recouvrement cyclique d'ordre 2 le long du diviseur $\{z = -(t^3 + x^2y + x) = 0\}$ stable pour l'action de $\mathbb{G}_m$. On obtient ainsi : $X = \{x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t])$ la cubique de Russell.

La construction peut s'effectuer de manière analogue en considérant en premier un recouvrement cyclique d'ordre 2 ,suivi d'un autre d'ordre 3. On résume la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X//\mu_3 \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dr] & & X//\mu_2 \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dl] \\
 & X//(\mu_2 \times \mu_3) \simeq \mathbb{A}^3 &
\end{tikzcd}$$

avec μ_i le groupe des racines i-ième de l'unité.

La cubique de Russell vue comme modification affine équivariante de $\mathbb{A}^3$:

On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z,t])$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x,z,t) \to (\lambda^6 x, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$ ainsi que $I = (f,g)$ où $f = -x^2$ et $g = x + z^2 + t^3$, l'idéal I est supporté par la courbe cuspidale contenue dans le plan $\{x = 0\}$ et qui a pour équation : $C = \{x = z^2 + t^3 = 0\}$, on remarque de plus que I et f sont stables par l'action de $\mathbb{G}_m$. Alors la modification affine de $\mathbb{A}^3$ le long du diviseur $D_f = 2D_x$ avec pour centre l'idéal $I = (-x^2, x + z^2 + t^3) \subset \mathbb{A}^3$ (voir 2.1), nous permet de construire la variété dont l'anneau des fonctions régulières est donné par $\mathbb{C}[x,z,t][\frac{g}{f}]$, sous algèbre du corps des fractions de $\mathbb{A}^3$. Ainsi en posant $y = \frac{g}{f}$, on obtient la sous-variété de $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t])$ satisfaisant l'équation $\{x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\}$, c'est à dire, la cubique de Russell. Le poids de $y = \frac{g}{f}$ pour l'action de $\mathbb{G}_m$ est induit par le poids de chaque polynôme, f et g.

Les deux transformations que sont la modification affine et le recouvrement multicyclique, vont permettre de générer un grand nombre d'espaces exotiques. C'est pourquoi on va étudier les répercussions de ces deux transformations sur les présentations A-H des $\mathbb{T}$-variétés.

En particulier, la cubique de Russell X est encodée par $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v])$

éclaté à l'origine et par $\mathcal{D}$ donné par :

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{2}\right\} D_3 + \left\{-\frac{1}{3}\right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{6}\right] E,$$

où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\mathbb{A}^2$, et où D_2 et D_3 sont les transformés stricts des courbes $\{u = 0\}$ et $\{u + v + v^2 = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2$ respectivement.

On va montrer dans la section 3.2 que cette présentation découle directement de sa structure de recouvrement bicyclique de $\mathbb{A}^3$. On obtient facilement les présentations A-H de $X//\mu_2$ et de $X//\mu_3$.

$X//\mu_2$ est encodée par $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v])$ éclaté à l'origine et par $\mathcal{D}_2$ donné par $\mathcal{D}_2 = \{\frac{1}{3}\}D_2 + [0, \frac{1}{3}]E$ où D_2 est le transformé strict de la courbe$\{u = 0\}$ et E le diviseur exceptionnel de l'éclatement.
$X//\mu_3$ est encodée par $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u', v])$ éclaté à l'origine et par $\mathcal{D}_3$ donné par $\mathcal{D}_3 = \{\frac{1}{2}\}D_3 + [0, \frac{1}{2}]E$ où D_3 est le transformé strict de la courbe$\{u' = 0\}$ et E le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

On va donc généraliser ce résultat aux variétés de Koras-Russell puis utiliser cette présentation particulière pour générer un grand nombre d'espaces exotiques.

Cette thèse est organisée comme suit, le premier chapitre sert à décrire la théorie Altmann-Hausen et à donner des méthodes effectives pour calculer les présentations A-H des $\mathbb{T}$-variétés. Le deuxième chapitre met en lien deux types de transformations, modification affine et recouvrement cyclique avec les présentations A-H. Dans le troisième chapitre en utilisant le précédent on construit des espaces affines exotiques avec action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. Le quatrième chapitre traite de la propriété d'être uniformément rationnelle d'un point de vue équivariant pour des G-variétés. Le dernier chapitre est un ensemble de questions ouvertes.

On va détailler maintenant les principaux résultats chapitre par chapitre.

Chapitre 1

Le premier chapitre est une introduction aux actions de groupes algébriques affines, suivi d'une spécialisation au cas des actions de tores, ce qui nous permet ensuite d'exposer la théorie Altmann-Hausen avec une attention particulière portée aux actions de $\mathbb{G}_m$.

Une $\mathbb{T}$-variété est une variété algébrique affine normale munie d'une action effective du tore $\mathbb{T}$. Une action de $\mathbb{T}$ sur une variété affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ est en relation biunivoque avec une coaction sur A [R1]. L'action d'un tore sur une variété induit ainsi une M-graduation de A où M est le réseau des caractères de $\mathbb{T}$. Or $M \simeq \mathbb{Z}^k$ pour $k = \dim(\mathbb{T})$, ainsi la donnée d'une algèbre de type fini $\mathbb{Z}^k$-graduée est équivalent à la donnée d'une $\mathbb{T}$-variété. On a alors :

$$A = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} A_m,$$

où $A_m = \{f \in A \mid \forall \lambda \in \mathbb{T}, \lambda \cdot f_m = \chi^m(\lambda) f_m\}$ avec χ^m un caractère de $\mathbb{T}$ et $\sigma^\vee$ est le cône de poids, c'est à dire, le cône engendré par les éléments m du réseau tel que $A_m \neq 0$.

On appelle complexité d'une action de $\mathbb{T}$ sur X la codimension d'une orbite générale, ce qui dans le cas des actions effectives se traduit par $\dim(X) - \dim(\mathbb{T})$.

Les A_0-modules constituant l'algèbre graduée sont alors obtenus à l'aide d'une variété Y , que l'on appellera quotient A-H, de dimension $\dim(X) - \dim(\mathbb{T})$ et d'un diviseur polyédral $\mathcal{D}$ sur Y, noté p-diviseur. Ce diviseur est une généralisation des diviseurs pour des tores de dimension supérieure : $\mathcal{D}$ peut être vu comme une collection de diviseurs $\mathcal{D}(u)$ paramétré par le cône de poids $\sigma^\vee$.

Théorème (Altmann-Hausen)**.** *Pour tout diviseur polyédral $\mathcal{D}$ sur une variété normale et semi-projective Y, le schéma :*

$$\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}) := \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u)))\Big)$$

est une $\mathbb{T}$-variété affine normale de dimension $\dim(Y) + \dim(\mathbb{T})$.

Réciproquement, toute $\mathbb{T}$-variété affine normale est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ pour un couple $(Y, \mathcal{D})$ bien choisi.

On appellera une telle présentation, une présentation A-H. Pour une $\mathbb{T}$-variété X donnée, le couple $(Y, \mathcal{D})$ n'est pas unique [A-H, corollaire 8.12] cependant il existe une construction canonique que l'on utilisera pour les démonstrations.

Dans le cas particulier des actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur une variété $X = \operatorname{Spec}(A)$ lisse, on a alors une méthode effective pour calculer la variété Y quotient A-H de X [T, Théorème 1.9, proposition 1.4].

Théorème. *Soit $X = \operatorname{Spec}(\oplus_{m \in \mathbb{Z}} A_m)$ une variété lisse munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$.*

Alors Y peut être choisie isomorphe à l'éclatement de $X//\mathbb{G}_m$ le long du sous-schéma Z correspondant à l'idéal $\mathcal{I} = \langle A_d \cdot A_{-d} \rangle$avec $d > 0$ et tel que $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_{dn}$ est généré par A_0 et$A_{\pm d}$.

Ce dernier théorème justifie la notation de quotient A-H pour la variété Y en effet, celle-ci est définie comme un éclatement (non nécessairement réduit) du quotient algébrique de X par $\mathbb{G}_m$.

Exemple. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y,z,t]) = \mathrm{Spec}(A)$ muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (y,z,t) = (\lambda^{-1}y, \lambda z, \lambda t)$.

Dans ce cas $\mathbb{A}^3//\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[yz^2, yt^3]) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v])$, et $\mathbb{A}^3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, [-1,0]\, E)$ avec $\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}$ l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ à l'origine et E est le diviseur exceptionnel cet éclatement.

Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre on va considérer deux types de transformations affines, la modification affine [Du, Ka-Z, Z] et le recouvrement cyclique [Es-V, tD2, Z]. Ces deux transformations peuvent être effectuées sur des variétés affines mais aussi sur des variétés quasi-projectives et donc, a priori sur les quotients A-H. On veut donc comprendre quelle est l'influence de ces deux transformations, lorsqu'elles sont faites de manière équivariante, sur la présentation A-H des $\mathbb{T}$-variétés.

En particulier pour les modifications affines on obtient le résultat suivant,

Théorème. *Soit $X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ une $\mathbb{T}$-variété et $\pi : Y' \to Y$ une modification affine de Y. Alors $\mathbb{S}(Y', \pi^*(\mathcal{D}))$ est isomorphe à un ouvert $\mathbb{T}$-invariant de X.*

Dans le cas des recouvrements cycliques, on va considérer G un groupe cyclique agissant sur une $\mathbb{T}$-variété X tel que les deux actions commutent. On pose alors $H_{\mathbb{T}}$, le sous-groupe de $\mathbb{T}$ constitué des éléments agissant trivialement sur $X//G$, la variété $X//G$ est alors munie d'une action effective de $\mathbb{T}' = \mathbb{T}/H_{\mathbb{T}}$. On obtient la caractérisation suivante :

Théorème. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une $\mathbb{T}$-variété et soit G un groupe fini agissant sur X tel que les deux actions commutent. Alors on a les résultats suivants :*

1) Il existe une variété semi-projective Y munie d'une action de G et un p-diviseur G-invariant $\mathcal{D}_G$ sur Y tel que X soit isomorphe de manière $\mathbb{T} \times G$ équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}_G)$.

2) Il existe un p-diviseur $\mathcal{D}'$ sur $Y//G$ tel que $X//G$ soit isomorphe de manière équivariante à la $\mathbb{T}'$-variété $\mathbb{S}(Y//G, \mathcal{D}')$. De plus en notant $F : M^\vee \to M'^\vee$ l'application linéaire induite par l'inclusion du réseau des caractères M' de $\mathbb{T}'$ dans celui M de $\mathbb{T}$, $\mathcal{D}'$ peut être choisi tel que $F_*(\mathcal{D}_G) = \varphi_G^*(\mathcal{D}')$, où $\varphi_G : Y \to Y//G$ est le morphisme quotient.

Exemple. On considère $\mathbb{A}^2$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{T} \simeq \mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x,y) \to (\lambda^2 x, \lambda^{-1} y)$ ainsi que de l'action du groupe μ_2, les racines carrées de l'unité, donnée par $\epsilon \cdot (x,y) \to (x, \epsilon y)$ on remarque que les orbites par l'action de μ_2

sont incluses dans celles de $\mathbb{G}_m$. Ainsi, $\mathbb{A}^2$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [-\frac{1}{2}, 0] \otimes \{0\})$.

Maintenant, on pose $X' = \mathbb{A}^2//\mu_2$ en tant que $\mathbb{T}'$-variété :

$$\mathbb{A}^2//\mu_2 \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y^2]) \simeq \mathbb{A}^2,$$

est muni d'une action du tore $\mathbb{T}'$,donnée par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. À l'aide du théorème précédent, $\mathbb{A}^2//\mu_2 \simeq \mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x^2, y])$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [-1, 0] \otimes \{0\})$.

De manière inverse, on considère une $\mathbb{T}$-variété X, possédant une structure de revêtement bicyclique. Alors à partir de la donnée de deux variétés quotient et de leurs présentations A-H on peut totalement déterminer la présentation de X. On obtient de cette manière la présentation A-H des variétés de Koras-Russell.

Chapitre 3

L'utilisation combinée des modifications affines et des recouvrements cycliques va permettre de générer un grand nombre de $\mathbb{T}$-variété et de déterminer totalement leurs présentations A-H. L'intérêt est que la topologie d'une variété obtenue à partir d'une variété X, soit par modification affine, soit par recouvrement cyclique, est connue en fonction de celle de la variété initiale X.

Dans le troisième chapitre, après avoir énoncé les résultats établis dans [tD1, tD2, Z] sur la topologie des variétés algébriques, on utilisera les résultats obtenus dans le chapitre deux pour construire des espaces affines exotiques, munis d'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. En particulier, après avoir donné les présentations A-H de l'ensemble des variétés de Koras-Russell, on généralisera la construction en dimension supérieure. Pour cela, on va caractériser le fait pour une variété d'être lisse et contractile dans les cas auxquels on s'intéresse :

Soit $Y = \{p(u_1, \ldots, u_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^n = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n])$, une hypersurface lisse contenant l'origine, et $\pi : \tilde{Y} \to Y$ l'éclatement le long du sous-schéma d'idéal $(u_1, \ldots, u_n)$.

De plus on considère $\mathcal{D} = \sum\limits_{i=1}^{k} \left\{ \frac{a_i}{n_i} \right\} \tilde{H}_i + \left[0, \frac{1}{\prod\limits_{p=1}^{k} n_p} \right] E$ avec $\tilde{H}_i$ transformé strict dans $\tilde{Y}$ de $H_i = \{h_i(u_1, \ldots, u_n) = 0\} \subset Y$ tel que $\operatorname{pgcd}(n_i, n_j) = 1$ et $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ vérifient $\sum\limits_{i=1}^{k} (a_i \prod\limits_{p=1, p \neq i}^{k} n_p) = 1$.

Théorème. *La variété $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \mathcal{D})$ est une variété lisse si et seulement si pour $i = 1, \ldots, k$, $H_i \in Y$ est un diviseur lisse et irréductible tel que $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i$ soit à croisements normaux dans Y.*

Si de plus, le groupe d'homotopie du complémentaire $\pi_1(Y \setminus \cup_1^k H_i)$ est un groupe abélien, alors $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \mathcal{D})$ est une variété lisse et contractile.

Exemple. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v, w])$ et

$$\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^3, \mathcal{D}) \text{ où } \mathcal{D} = \left\{ \frac{-1}{2} \right\} D_1 + \left\{ \frac{1}{3} \right\} D_2 + \left\{ \frac{1}{5} \right\} D_3 + \left[0, \frac{1}{30} \right] E.$$

Avec $\tilde{\mathbb{A}}^3$ l'éclatement de $\mathbb{A}^3$ à l'origine, E le diviseur exceptionnel de cet éclatement, D_1 le transformé strict de la surface $\{u = 0\}$, D_2 le transformé strict de la surface $\{w = 0\}$ et D_3 le transformé strict de la surface $\{p(v) + u + w = 0\}$ avec $p(v)$ un polynôme régulier et tel que $p(0) = 0$.

$\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^3, \mathcal{D})$ est alors isomorphe de manière équivariante à l'hypersurface X lisse et contractile de $\mathbb{A}^5 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t, \theta])$, donnée par l'équation $\{p(xy)y^{-1} + z^2 + t^3 + \theta^5 = 0\}$ qui est un espace exotique [Ka-ML2, proposition 11.1]. De plus X est munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^5$ suivante : $\lambda \cdot (x, y, z, t, \theta) = (\lambda^{30}x, \lambda^{-30}y, \lambda^{15}z, \lambda^{10}t, \lambda^6\theta)$.

Chapitre 4

Dans un quatrième chapitre, on étudiera la notion équivariante de la propriété suivante : une variété X est dite uniformément rationnelle si tout point de cette variété admet un voisinage ouvert, pour la topologie de Zariski, qui est isomorphe à un ouvert de l'espace affine [Gr]. Une question toujours ouverte, pour $\dim(X) > 2$, est la suivante :

Soit X une variété lisse et rationnelle de dimension n, est-il vrai que pour chaque point x dans X il existe un ouvert de Zariski U qui contient x et qui est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{A}^n$?

Pour le cas d'une variété lisse et rationnelle de dimension 1 ou 2 , la réponse à la question est oui. Le sujet a était traité dans [Bo-Bö, Bod-Hau-S-Vi], avec de plus certains résultats pour les éclatements de centres lisses dans les variétés uniformément rationnelles. Cependant, il n'existe pas de résultat général en dimension supérieure. Cependant, dans le cas des $\mathbb{T}$-variétés de complexité 0 ou 1 il y a équivalence entre être lisse et rationnelle ou bien uniformément rationnelle [Ke-Kn-Mu-S, Chapitre 4]. On s'intéresse donc au cas des G-variétés avec une définition équivariante.

On dira qu'une G-variété est G-linéairement uniformément rationnelle si pour tout point x dans X, il existe un voisinage ouvert G-stable U_x de x, une représentation de G donnée par $(\mathbb{A}^n, G \to GL_n)$ et $V \subset \mathbb{A}^n$ un ouvert stable par G tel que U_x soit isomorphe de manière équivariante à V.

Des variétés qui sont G-linéairement uniformément rationnelle sont donc uniformément rationnelles. En utilisant la présentation A-H d'une $\mathbb{T}$-variété X, on est ramené à considérer des diviseurs à coefficients polyédraux dans le quotient A-H de X, qui est de dimension $\dim(X) - \dim(\mathbb{T})$. On considère alors un problème géométrique dans des espaces de dimensions inférieures avec des coefficients fixés.

On développe ainsi une technique nous permettant de déterminer si des $\mathbb{G}_m$-variétés de dimension 3 sont, ou ne sont pas, $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelle, en utilisant d'une part la présentation A-H de celle-ci mais aussi le fait que les actions de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$ sont linéarisables [Ka-K-ML-R]. Ce dernier point nous donne une caractérisation en terme de présentation A-H de $\mathbb{A}^3$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$.

Proposition. *Soit $\mathbb{A}^3$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. Alors $\mathbb{A}^3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$.*

i) Y isomorphe à Z/μ où μ est un groupe cyclique et Z est l'éclatement le long d'un sous-schéma supporté par l'origine.

ii) $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$\mathcal{D} = \{p_1\} \otimes D_1 + \{p_2\} \otimes D_2 + [p_3, p_4] \otimes E,$$

où D_1 , D_2 sont les transformés stricts de droites linéaires dans le même système de coordonnées et E correspond au diviseur exceptionnel de l'éclatement.

On obtient alors avec la technique développée dans ce chapitre des familles de variétés $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles, en particulier :

Théorème. *Toutes les variétés de Koras-Russell de première espèce données par l'équation $X = \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$ dans $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ sont $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles.*

Exemple. La cubique de Russell $X = \{x + x^2 y + z^2 + t^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ est une variété linéairement uniformément rationnelle.

Bien que l'ensemble des variétés de Koras-Russell soient des variétés lisses rationnelles contractiles, en utilisant un invariant birationnel et des résultats de géométrie en dimension 2, on est capable d'établir le résultat suivant :

Théorème. *Il existe des variétés de Koras-Russell qui ne sont pas $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles.*

Exemple. La variété de Koras-Russell définie par $\{z^{\alpha_2} - \lambda x(xy - \mu) + y(x + y(z^{\alpha_2} - \lambda x(xy - \mu))^2)^2 + t^{\alpha_3} = 0\} \in \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ n'est pas une variété $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelle.

Chapitre 1

Préparation

1.1 Quelques généralités sur les actions de groupes algébriques

Dans cette section on rappelle rapidement les notions de *groupe algébrique affine* puis celle de *G-variété* pour finalement définir et construire les différents types de quotients que sont le quotient catégorique, le quotient géométrique ou encore le bon quotient.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. Un *groupe algébrique affine* G est une variété algébrique affine munie de trois morphismes de variétés :

i) la loi de composition $\mu : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$,

ii) l'application inverse $i : G \to G$, $g \to g^{-1}$,

iii) le morphisme "élément neutre" $e : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to G$,

qui satisfont les axiomes usuels d'une loi de groupe. En particulier le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \times G \arrow[r, "e \times Id"] \arrow[d, "p_2"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "Id"] & G \end{tikzcd}$$

Définition 1.1.2. Soit G, H deux groupes algébriques affines. Un *morphisme de groupe algébrique* $\pi : G \to H$ est un morphisme de variété qui est compatible avec la structure de groupe.

Exemple 1.1.3.

i) Pour tout espace vectoriel complexe V le groupe $GL(V)$ des endomorphismes inversibles de V est un groupe algébrique affine. En effet $GL(V)$ est isomorphe à l'ouvert de l'espace affine $\mathrm{End}(V) \simeq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$, où $n = \dim(V)$, formé des matrices dont le déterminant Δ ne s'annule pas. Comme le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients des matrices, on a donc $GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n^2}, y]/(\Delta y - 1))$.

ii) Tout groupe fini est un groupe algébrique affine. En effet d'après le Théorème de Cayley tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ pour n bien choisi. Ce dernier est isomorphe au groupe $\mathcal{P}_n \subset GL_n$ des matrices de permutations, qui est un sous-ensemble algébrique fermé de l'ensemble des matrices.

iii) Le groupe additif $\mathbb{G}_a$, c'est à dire la droite affine munie de la loi d'addition, est isomorphe au sous-groupe de GL_2, constitué des matrices de la forme

$\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{C}$. On a donc, $\mathbb{G}_a \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_3, x_1 - 1, x_4 - 1)) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_2])$.

iv) Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ est isomorphe à $GL_1 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}])$.

Plus généralement tout groupe algébrique affine est isomorphe à un sous groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ pour n bien choisi (voir [S, Théorème 2.3.7]).

Définition 1.1.4. i) Une *représentation rationnelle* V d'un groupe algébrique affine G est la donnée d'un espace vectoriel V de dimension finie et d'un homomorphisme de groupe algébrique $\rho : G \to GL(V)$. Une représentation induit une action linéaire de G sur v, $g \star v = \rho(g)v$.

ii) On appelle sous-représentation de V un sous-espace G-stable de V.

iii) Une représentation V est dite irréductible si ses seuls sous-espaces vectoriels G-stable sont V et $\{0\}$.

iv) Une représentation V est dite semi-simple si elle est une somme directe de sous-représentations irréductibles.

Définition 1.1.5. Soit G un groupe algébrique affine, e_G l'élément neutre de G et X une variété algébrique. Une action de G sur X est la donnée d'un morphisme de variété algébrique $\mu : G \times X \to X$ qui satisfait aux axiomes d'une action d'un groupe sur un ensemble, à savoir :

i) $\mu(e_G, x) = x$ pour tout $x \in X$

ii) $\mu(g_1 g_2, x) = \mu(g_1, \mu(g_2, x))$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ et pour tout $x \in X$.

On appelle une telle variété une G-variété et on notera $\mu(g, x) := g \cdot x$.

Exemple 1.1.6. i) Tout groupe algébrique affine G est une variété algébrique et donc une G-variété pour l'action sur lui même par translations.

ii) La droite affine $\mathbb{A}^1$ munie de l'action de $\mathbb{G}_m$ définie par $\lambda \cdot x = \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$ et pour tout $x \in \mathbb{A}^1$.

iii) Le plan affine $\mathbb{A}^2$ muni de l'action de $\mathbb{G}_a$ définie par $t \cdot (x, y) = (t + x, t + y)$ pour tout $t \in \mathbb{G}_a$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{A}^2$.

Lorsque X est affine, $X = \mathrm{Spec}(A)$, une action algébrique $\mu : G \times X \to X$ est déterminée de manière unique par son homomorphisme de co-action :

$$\mu^\sharp : A \to \mathcal{O}(G) \otimes A = \mathcal{O}(G \times X).$$

Pour tout $f \in A$, $g \in G$ et pour tout $x \in X$, on a $\mu^\sharp(f)(g, x) = f(g \cdot x)$.

Définition 1.1.7.

i) Soient G et G' deux groupes algébriques affines et soient X une G-variété et Y une G'-variété. Un *morphisme équivariant* est la donnée d'un couple (ϕ, ψ)

où $\psi : G \to G'$ est un morphisme de groupe algébrique et $\phi : X \to Y$ est un morphisme de variété tel que $\phi(g \cdot x) = \psi(g) \cdot \phi(x)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $g \in G$. Lorsque $G = G'$ on appelle par convention morphisme G-équivariant $\phi : X \to Y$ un couple (ϕ, id_G) au sens précédent.

ii) Étant données X une G-variété X et Y une variété quelconque, un morphisme $\phi : X \to Y$ est dit *G-invariant* si ϕ est G-équivariant pour l'action triviale sur Y ce qui se traduit par $\phi(g \cdot x) = \phi(x)$ pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in X$. Une fonction G-invariante sur X est un morphisme G-invariant $f : X \to \mathbb{A}^1$.

Définition 1.1.8. Soit X une G-variété,

i) L'action de G est dite effective si pour tout $g_1, g_2 \in G$ avec $g_1 \neq g_2$ il existe $x \in X$ tel que $g_1 \cdot x \neq g_2 \cdot x$.

ii) Un point $x \in X$ est dit fixe si $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$.

iii) On appelle orbite d'un point $x \in X$ le sous-ensemble $Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ de X.

iv) On appelle stabilisateur de $x \in X$ le sous-ensemble $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ de G.

v) Un sous-ensemble $Y \subset X$ est dit G-stable si $g \cdot y \in Y$ pour tout $y \in Y$ et pour tout $g \in G$.

1.1.2 Différentes notions de quotients

Le premier objet naturel associé à une variété algébrique X munie d'une action d'un groupe algébrique G, est l'ensemble des orbites de X sous l'action de ce groupe. En général, il n'est pas possible de munir cet ensemble d'une structure de variété algébrique de sorte que, l'application ensembliste qui à x associe son orbite Gx soit un morphisme de variétés algébriques ; c'est le cas par exemple dès que certaines orbites ne sont pas fermées pour la topologie de Zariski. Une solution consiste à considérer diverses notions plus faibles de *variétés quotients* paramétrant "au mieux" les orbites. Dans cette section, on rappelle différentes constructions de quotients possibles, telles que *quotient géométrique* et *bon quotient.*

Soit X une G-variété. Alors tout morphisme invariant $X \to Z$ où Z est une variété, peut être considéré comme une sorte de quotient de X. Cela conduit directement à une première notion de quotient, dite *quotient catégorique.*

Définition 1.1.9. Soient X une G-variété, Z une variété et $\pi : X \to Z$ un morphisme G-invariant. On dit que le couple (Z, π) est un *quotient catégorique* si pour tout morphisme G-invariant $\varphi : X \to Y$ il existe un unique morphisme $\bar{\varphi} : Z \to Y$ tel que φ se factorise par π via $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Dans le cas où X est affine, un quotient catégorique $\pi : X \to Z$ dans la catégorie des variétés affines est donc une variété affine Z dont le comorphisme $\pi^* : \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ se factorise par la sous-algèbre $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G$ de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ formée des fonctions régulières G-invariantes et qui est universel pour cette propriété. Lorsque Z existe on le note $X//G$.

On voit en particulier que ce quotient catégorique existe dès lors que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G$ est une algèbre de type finie. Cela n'est pas toujours le cas, il existe par exemple des $\mathbb{G}_a$-variétés affines X dont l'algèbre des invariants $\mathcal{O}(X)^{\mathbb{G}_a}$ n'est pas de type finie (voir [Fr, Chapitre 7]). On se place dorénavant dans une classe particulière de groupes, dits *groupes réductifs,* pour lesquels l'existence de quotient de ce type est garantie.

Définition 1.1.10. Un groupe algébrique G est dit *réductif* s'il ne contient aucun sous-groupe fermé distingué isomorphe à $(\mathbb{G}_a)^n$. En caractéristique 0, cela est équivalant à la propriété pour G d'être *linéairement réductif*, c'est-à-dire que toute représentation rationnelle de G est semi-simple ([Mu, p.27]).

En particulier, tout tore algébrique est un groupe réductif.

Théorème 1.1.11 (Nagata). *[Do, Théorème 3.3] Soit G un groupe algébrique réductif agissant sur une variété affine X. Alors l'algèbre des invariants $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G$ est de type fini.*

L'inclusion $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ induit un morphisme de variété $\pi : X \to \operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G)$ qui, d'après la discussion précédente est un quotient catégorique dans la catégorie des variétés affines.

Donnons des exemples à la fois de quotients catégoriques et d'orbites pouvant apparaitre :

Exemple 1.1.12.

i) On considère l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ donné par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda x, \lambda y)$. On a donc $\mathbb{A}^2//\mathbb{G}_m \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{G}_m}) \simeq \{pt\}$. L'unique orbite fermée est le point fixe $(0, 0)$, les autres orbites forment un pinceau de droites passant par l'origine, privées de cette même origine. Ces orbites sont donc ouvertes et ont $\{0\}$ dans leur adhérence, ainsi elles ont la même image par le morphisme quotient.

ii) On considère l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ donné par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. Les orbites fermées sont l'origine, qui est un point fixe, ainsi que les hyperboles d'équations $\{xy = a \mid a \neq 0\}$. On a donc :

$$\mathbb{A}^2//\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{G}_m}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[xy]).$$

Cependant les deux axes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ tous les deux privés de l'origine constituent des orbites ouvertes.

Définition 1.1.13. Un morphisme G-invariant $\pi : X \to Z$ où Z est une variété est appelé un *quotient géométrique* si chaque fibre de π est une orbite. Cela implique en particulier que toutes les orbites sont fermées et que l'application est surjective.

Exemple 1.1.14. On considère une variété affine X et un groupe algébrique fini G et l'inclusion $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^{\mathbb{G}_m} \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. L'existence d'une section $f \to \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f$ de l'inclusion garantit que le morphisme $\pi : X \to \mathrm{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^G)$ est un quotient géométrique.

L'exemple précédent 1.1.12 illustre le fait que pour des groupes plus généraux, le quotient catégorique, lorsqu'il existe, n'est en général pas un quotient géométrique.

Définition 1.1.15. Un morphisme G-invariant $\pi : X \to Z$, où Z est une variété, est appelé un *bon quotient catégorique* pour l'action de G si π satisfait :

1) Pour tout ouvert $U \subseteq Z$, π^* induit un isomorphisme, $\mathcal{O}(U) \tilde{\to} \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^G$.

2) Si $W \subseteq X$ est un fermé G-invariant, alors $\pi(W) \subseteq Z$ est un fermé.

3) Si $W_1, W_2 \subseteq X$ sont des fermés G-invariants et que de plus $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, alors $\pi(W_1) \cap \pi(W_2) = \emptyset$.

En particulier un bon quotient catégorique est un quotient catégorique. Un bon quotient catégorique qui satisfait les propriétés pour être un quotient géométrique est appelé un *bon quotient géométrique.*

Proposition 1.1.16. *[B1, Théorème 4.3.1] Si G est un groupe fini et que X est une G-variété quasi projective, alors $\pi : X \to X//G$ est un bon quotient géométrique dans la catégorie des variétés quasi-projectives et π est un morphisme fini.*

Exemple 1.1.17.

i) Soit $\mathbb{G}_m$ agissant sur $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. La variété $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est quasi-affine, et l'application $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ définie par $\pi(x_1, x_2) = [x_1 : x_2]$ est un bon quotient géométrique dans la catégorie des variétés algébriques. En effet les plus petits sous-ensembles $\mathbb{G}_m$-stables sont exactement les orbites et deux orbites différentes sont envoyées sur deux points différents. Par contre, le quotient catégorique dans la catégorie des variétés quasi-affines est l'application constante de l'exemple 1.1.12.

ii) Soit $\mathbb{G}_m$ agissant sur $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda^{-1} x_2)$. L'application $\pi : X \to \mathbb{A}^1$ donnée par $\pi(x_1, x_2) = x_1 x_2$ est un quotient dans la catégorie des variétés. Pour obtenir un quotient géométrique il faut considérer la droite à deux origines ([Har, Exemple 2.3.6]) qui n'est pas un schéma séparé. En effet X est recouvert par deux ouverts affines $U_1 = \mathbb{A}^2 \setminus \{x_1 = 0\}$ et $U_2 = \mathbb{A}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$, chacun admettant un bon quotient géométrique, $U_i//\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1$ pour $i = 1, 2$. Le bon quotient est obtenu en recollant $U_1//\mathbb{G}_m$ et $U_2//\mathbb{G}_m$ par l'identité le long de $(U_1 \cap U_2)//\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

iii) Soit $\mathbb{G}_m$ agissant sur $\mathbb{A}^1_* \times \mathbb{A}^1_* = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}])$ par $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda^{-1} \cdot x_2)$. Alors l'application $\pi : X \to \mathbb{A}^1_*$ tel que $\pi(x_1, x_2) = (x_1 x_2)$ est un bon quotient géométrique.

Théorème 1.1.18. *[Ro] Soit X une G-variété affine irréductible, alors il existe un ouvert affine $X_0 \subseteq X$ non vide et stable par G qui admet un bon quotient géométrique dans la catégorie des variétés affines.*

Supposons maintenant que X est une variété algébrique irréductible quasi-projective. L'idée générale pour obtenir le "meilleur quotient possible" est alors de recouvrir X par des ouverts affines G-invariants U_i tel que l'on puisse considérer le quotient $U_i//G$ au sens de la définition 1.1.9. On espère pouvoir ensuite construire $X//G$ par recollement des $U_i//G$. Un tel recouvrement n'existe pas systématiquement et d'autre part le recollement n'est pas toujours possible dans la catégorie des variétés, de manière similaire à l'exemple 1.1.17 ii).

Exemple 1.1.19. On considère $\mathbb{P}^1$ muni d'une action de $\mathbb{G}_a$ définie par $t \cdot [u : v] \to [u + tv : v]$ alors dans ce cas le point à l'infini, $[1 : 0]$ n'admet pas de voisinage ouvert $\mathbb{G}_a$-invariant.

On va cependant pouvoir réaliser cette construction pour un ouvert U de X et ainsi définir le quotient $U//G$, le but étant de considérer un ouvert U maximal. La construction de l'ouvert U va dépendre du choix d'un fibré en droites G-linéarisé.

Définition 1.1.20. Soit X une G-variété et $\pi : L \to X$ un fibré en droites sur X. Une *G-linéarisation* de L est un relevé de l'action $\mu : G \times X \to X$ en une action $\bar{\mu}$ sur L tel que :

i)

$$\begin{tikzcd} G \times L \arrow[r, "\bar{\mu}"] \arrow[d, "id \times \pi"'] & L \arrow[d, "\pi"] \\ G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd} \text{, commute}$$

ii) G opère linéairement dans les fibres de L. En particulier la section nulle de L est G-invariante.

Exemple 1.1.21. On considère $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le fibré en droites trivial, $L_k = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ muni de l'action $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n, l) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \lambda^k l)$ est $\mathbb{G}_m$-linéarisé.

Définition 1.1.22. Soit L un fibré en droites G-linéarisé sur X, et soit $x \in X$:

i) On dit que x est *semi-stable* si il existe $m > 0$ et $s \in \Gamma(X, L^{\otimes m})^G$ tel que $X_s = \{y \in X : s(y) \neq 0\}$ soit un ouvert affine contenant x. L'ensemble des points semi-stables est noté $X^{ss}(L)$.

ii) On dit que x est *stable* si il existe s satisfaisant les hypothèses de i) avec de plus, G_x est fini et toutes les orbites de G dans X_s sont fermées. L'ensemble des points stables est noté $X^s(L)$

Les ensembles $X^{ss}(L)$ et $X^s(L)$ sont des ouverts G-invariants. Si $x \in X$ n'est pas semi-stable on dit qu'il est instable.

Exemple. (Suite de l'exemple 1.1.21) On considère L_k le fibré en droites $\mathbb{G}_m$-linéarisé construit précédemment. L'espace des sections $\Gamma(\mathbb{A}^n, L_k)$ s'identifie à $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ via l'application :

$$f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mapsto s(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Ainsi, $s \in \Gamma(X, L_k^{\otimes m})^{\mathbb{G}_m}$ si et seulement si $f(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^{mk} \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ et $\lambda \in \mathbb{G}_m$.

Si $k = 0$, alors le polynôme constant égal à 1 définit une section invariante de $L_k^{\otimes m}$ pour tout m et donc $X^{ss}(L_0) = \mathbb{A}^n$ et

$$\mathbb{A}^n /\!/ \mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathbb{G}_m}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}).$$

Si $k > 0$, puisque l'ensemble des points semi-stables et le quotient correspondant sont inchangés si on remplace L_k par une de ses puissances tensorielles, on peut supposer que $k = 1$. On a alors :

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{A}^n, L_1^{\otimes m})^{\mathbb{G}_m} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_m = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\geq 0},$$

où $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_m$ est l'ensemble des polynômes homogènes de degré m. De plus $\bigoplus_{m>0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{A}^2, L_1^{\otimes m})^{\mathbb{G}_m} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{>0}$ est l'idéal engendré par $x_1, \ldots, x_n$. On a donc

$$X^{ss}(L_1) = D(x_1) \cup \ldots \cup D(x_n) = \mathbb{A}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}.$$

où $D(x_i)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{A}^n$ où x_i ne s'annule pas pour $i = 1, \ldots, n$.

Théorème 1.1.23. *[Mu] Soit X une G-variété irréductible et L un fibré en droites G-linéarisé. Alors il existe un bon quotient :*

$$\pi : X^{ss}(L) \to X^{ss}(L)//G.$$

De plus il existe un ouvert $U \subseteq X^{ss}(L)//G$ tel que $\pi^{-1}(U) = X^{s}(L)$ et $\pi_{|\pi^{-1}(U)}$ soit un bon quotient géométrique.

Exemple. (Suite de l'exemple 1.1.21) Pour le fibré en droites $\mathbb{G}_m$-linéarisé L_k construit précédemment, le morphisme

$$\begin{array}{rcc} \pi : X^{ss}(L_k) = \mathbb{A}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\} & \to & X^{ss}(L_k)//\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{P}^{n-1} = \mathrm{Proj}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]) \\ (x_1,\ldots,x_n) & \to & [x_1 : \ldots : x_n] \end{array}$$

est un bon quotient.

Soit A un anneau de type fini gradué en degrés positifs $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$. C'est-à-dire, un anneau A de type fini, un sous-anneau A_0 et une famille de A_0-modules A_n tel que pour tout n et $m \in \mathbb{N}$, $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$. Pour la construction suivante on se réfèrera à [E-Ha, III.2].

Définition 1.1.24. Le *spectre premier homogène* d'un anneau gradué en degrés positifs $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$, noté $\mathrm{Proj}_{\mathbb{C}}(A)$, est l'ensemble des idéaux premiers homogènes de A ne contenant pas $\bigoplus_{n>0} A_n$.

Une base d'ouverts de $\mathrm{Proj}_{\mathbb{C}}(A)$ est donnée par les ensembles $\mathrm{Spec}(A_f{}^\circ)$, où f est un élément homogène de A et $\mathrm{Spec}(A_f{}^\circ)$ est l'ensemble des idéaux premiers de $\mathrm{Spec}(A)$ ne contenant pas f. L'anneau des fonctions régulières est la partie homogène de degré 0, $(A_f{}^\circ)$ du localisé A_f, c'est à dire, $\{\frac{a}{f^m} \in A_f : a \in A_{m(deg(f))}\}$.

Exemple 1.1.25. Soient $d_1,\ldots,d_{n+1}$ des entiers strictement positifs. On considère $A = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_{n+1}] = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ où $A_0 = \mathbb{C}$ et A_n est engendré par les monômes de la forme $\Pi x_i^{n_i}$ tel que $\sum n_i d_i = n$. Alors $\mathrm{Proj}_{\mathbb{C}}(A) = \mathbb{P}(d_1,\ldots,d_{n+1})$ l'espace projectif a poids (voir [Do, p.39]). En particulier si pour tout $i = 1,\ldots,n+1$ on a $d_i = 1$ alors $\mathrm{Proj}_{\mathbb{C}}(A) = \mathbb{P}(1,\ldots,1)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ et les idéaux homogènes sont engendrés par des polynômes homogènes pour le degré usuel.

Proposition 1.1.26. *[Mu] Reprenons les hypothèses du Théorème 1.1.23. Si de plus X est projectif et L est ample, alors en posant $R = \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(X, L^{\otimes d})$ on a :*

$$X^{ss}(L)//G \simeq \mathrm{Proj}(R^G).$$

Exemple 1.1.27. Si on considère $\mathbb{G}_m$ agissant sur $\mathbb{A}^{n+1}$ via $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\lambda^{d_1} x_1, \ldots, \lambda^{d_{n+1}} x_{n+1})$ alors $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ est naturellement gradué comme dans l'exemple précédent avec $A_0 = \mathbb{C}$ et dans ce cas-là on obtient :

$$\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} // \mathbb{G}_m = \mathbb{P}(d_1, \ldots, d_{n+1}).$$

On va maintenant considérer la normalisation d'une G-variété X et montrer que la variété ainsi obtenue $\hat{X}$ est elle-même une G-variété. De plus dans le cas d'un groupe fini G la normalisation et le quotient par G commutent.

Proposition 1.1.28. *Soit X une G-variété affine et $\eta : \hat{X} \to X$ sa normalisation alors l'action de G se relève de manière unique à $\hat{X}$ de telle sorte que la normalisation soit équivariante.*

Démonstration. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\hat{X} = \mathrm{Spec}(\hat{A})$ avec $A \subset \hat{A} \subset \mathrm{Frac}(A)$. Or A et $\mathrm{Frac}(A)$ sont G-stables, on veut montrer que $\hat{A}$ est aussi G-stable.

Soit $\alpha \in \hat{A}$ alors par définition il existe $P = X^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i X^i$ un polynôme unitaire à coefficients dans A tel que $P(\alpha) = 0$, on fait agir G sur $P(\alpha)$ ce qui donne :

$$(g^{-1} \cdot P)(\alpha) = (g \cdot \alpha)^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} (g \cdot a_i)(g \cdot \alpha)^i = 0,$$

or $g \cdot a_i \in A$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ car A est G-stable donc pour tout $\alpha \in \hat{A}$ son image par un élément g de G est aussi dans $\hat{A}$ donc la normalisation de A est stable par G. □

Proposition 1.1.29. *Soit Y une variété quasi-projective munie d'une action d'un groupe fini G. Alors la normalisation de Y et le quotient par G commutent, on a donc $\widehat{Y}//G \simeq \widehat{Y//G}$*

Démonstration. D'après la proposition précédente l'action du groupe G remonte à la normalisation $\widehat{Y}$. De plus étant donné que Y est une variété quasi-projective et que G est fini, tout $y \in Y$ admet un voisinage affine ouvert G-invariant. La normalisation est une propriété locale on peut donc supposer que Y est une variété affine.

En utilisant la propriété universelle de la normalisation, c'est à dire, si $f : Z \to Y$ est un morphisme dominant et que Z est une variété affine normale alors il existe un unique $f' : Z \to \widehat{Y}$ tel que $f = n \circ f'$ et la propriété universelle du quotient (cf) on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \to & Y//G \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widehat{Y} & \to & \widehat{Y//G} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \widehat{Y}//G \end{array}$$

Ainsi on a $\mathbb{C}[\widehat{Y//G}] \subset \mathbb{C}[\widehat{Y}]^G$. Inversement si l'on considère $f \in \mathbb{C}[\widehat{Y}]^G$, alors $g \cdot f = g$ pour tout $g \in G$ et il existe un polynôme unitaire P avec ses coefficients dans $\mathbb{C}[Y]$ tel que $P(f) = 0$. Or G est fini donc $Q = \prod_{g \in G} g.P$ est un polynôme unitaire G-invariant tel que $G(f) = 0$. On a donc $f \in \mathbb{C}[\widehat{Y//G}]$ et le diagramme devient donc :

$$\begin{array}{ccc} Y & \to & Y//G \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ \widehat{Y} & \to & \widehat{Y//G} \simeq \widehat{Y}//G \end{array}$$

$\square$

1.2 Tores algébriques, cônes et diviseurs polyédraux

Le but de cette partie est de rappeler la correspondance entre une action d'un *tore algébrique* sur une variété affine et une $\mathbb{Z}^n$-graduation de son anneau de fonctions. Puis dans un second temps on introduira la notion de *diviseur polyédral,* en commençant par les diviseurs à coefficients entiers puis rationnels.

1.2.1 Tores algébriques et réseaux des caractères

Définition 1.2.1. On appelle *tore algébrique* de dimension n le sous-groupe algébrique de GL_n composé des matrices diagonales. Ce groupe algébrique est isomorphe à $(\mathbb{G}_m)^n$ où $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif.

Si il n'y a pas de confusion possible on notera $\mathbb{T}$ pour désigner un tore algébrique de dimension n et on le nommera simplement tore. L'anneau de coordonnée de $\mathbb{T}$ est l'algèbre $\mathbb{C}[\mathbb{T}] \simeq \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ des polynômes de Laurent en n variables.

Définition 1.2.2. Un *caractère* d'un tore $\mathbb{T}$ est un morphisme de groupe algébrique $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{G}_m$.

Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, l'application $\chi^a : \mathbb{T} \to \mathbb{G}_m$ définie par

$$\chi^a(t_1, \dots, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n},$$

est un caractère de $\mathbb{T}$. Tous les caractères sont en fait de cette forme.

Soit $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{G}_m$ un caractère, alors :

$$\chi(t_1, \dots, t_n) = \chi(t_1, 1, ., 1)\chi(1, t_2, \dots, 1) \cdots \chi(1, \dots, 1, t_n)$$

car χ est un homomorphisme de groupe. Ainsi, déterminer un caractère revient à déterminer son évaluation sur les générateurs. Chacun de ces sous-groupes est clairement isomorphe à $\mathbb{G}_m$. Ainsi χ est déterminée par des automorphismes $\chi_i : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ pour $i = 1, \dots, n$ ce qui implique que $\chi_i(t) = t^{a_i}$ pour un certain $a_i \in \mathbb{Z}$.

Étant donné deux caractères χ^a et χ^b d'un tore $\mathbb{T}$, on peut considérer la multiplication $\chi^a \cdot \chi^b = \chi^{a+b}$. L'ensemble des caractères d'un tore forment alors un groupe abélien M isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Définition 1.2.3. Un réseau est un groupe abélien libre de rang fini. Un réseau de rang n est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Ainsi on dira que M est le réseau des caractères du tore. Étant donnée une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ on a des isomorphismes d'algèbre :

$$\mathbb{C}[\mathbb{T}] \simeq \bigoplus_{m \in M} \mathbb{C}\chi^m \simeq \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{C}\chi^a \simeq \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}],$$

où $t_i = \chi^{e_i}$. Il existe une notion duale aux caractères :

Définition 1.2.4. Un *sous-groupe à un paramètre* d'un tore $\mathbb{T}$ est un morphisme de groupe algébrique $\gamma : \mathbb{G}_m \to \mathbb{T}$.

De la même manière que précédemment, tout $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ détermine un sous-groupe à un paramètre $\gamma^b : \mathbb{G}_m \to \mathbb{T}$ tel que $\gamma^b(t) = (t^{b_1}, \ldots, t^{b_n})$, et l'on peut montrer que tous les sous-groupes à un paramètre du tore $\mathbb{T}$ sont de cette forme. L'ensemble des sous-groupes à un paramètre forme aussi un groupe abélien libre de rang n, noté N.

Étant donné un caractère χ^a et un sous-groupe à un paramètre γ^b, on peut alors considérer la composition $\chi^a \circ \gamma^b : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ donnée par $t \to t^m$ où $m = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i := \langle a, b \rangle$. On a alors $M = Hom(N, \mathbb{Z})$, de sorte que M et N sont des réseaux duaux avec l'application donnée par $\langle \chi, \gamma \rangle = \chi \circ \gamma(t) = m$.

Supposons que $X = \mathrm{Spec}(A)$ soit munie d'une action d'un tore $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$ soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{T}$ et soit $f \in A$. Alors f satisfait :

$$(\lambda \cdot f)(x) = f(\lambda^{-1} \cdot x) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} \chi^u(u) f_u(x),$$

où$f_u(x) \in A$ vérifie $t \cdot f_u = \chi^u(t) f_u$. Ainsi $f = \sum_{u \in I} f_u$ où I est un sous ensemble fini de M.

On peut alors décomposer A sous la forme : $A = \bigoplus_{u \in M} A_u$ où

$$A_u = \{f \in A \mid \forall \lambda \in \mathbb{T}, \lambda \cdot f_u = \chi^u(\lambda) f_u\}.$$

Un élément de A_u est appelé un *semi-invariant* de poids u.

On obtient ainsi une structure d'algèbre M-graduée avec $A_{u_1} \cdot A_{u_2} \subset A_{u_1+u_2}$ pour tout u_1 et $u_2 \in M$.

Réciproquement (voir [R1]) étant donnée une algèbre de type fini M-graduée $A = \bigoplus_{u \in M} A_u$, la variété $X = \mathrm{Spec}(A)$ admet une action de $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(M)$ déterminée comme suit par son comorphisme :

Étant donné un système de générateurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de A, on pose $F_i(x, \lambda) = \sum \chi^u(\lambda) x_{iu}$ ainsi pour tout $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{T}$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X$ on a : $\tau \cdot \xi = (F_1(\tau, \xi), \ldots, F_n(\tau, \xi))$.

Ainsi il y a une correspondance bi-univoque entre les variétés affines munies d'une action de $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(M)$ est les $\mathbb{C}$-algèbres de type fini M-graduées.

1.2.2 Cônes convexes polyédraux

Soit $N \simeq \mathbb{Z}^k$ un réseau de rang k et $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ son réseau dual, on notera $N_{\mathbb{Q}}$ et $M_{\mathbb{Q}}$ les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ respectivement.

Définition 1.2.5. Soit $S \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, un sous-ensemble fini, on appelle *cône convexe polyédral rationnel* (ou cône convexe dans $N_{\mathbb{Q}}$) le sous-ensemble déterminé par S

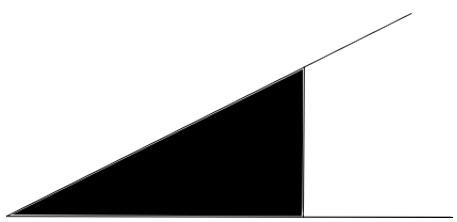
$$\sigma = Cone(S) = \{\sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\} \subset N_{\mathbb{Q}}.$$

Définition 1.2.6. Un cône convexe polyédral σ dans $N_{\mathbb{Q}}$ est dit pointé si $\sigma \cap (-\sigma) = 0$. En d'autres termes σ est pointé si il ne contient pas de droite vectorielle de $N_{\mathbb{Q}}$.

Exemple 1.2.7.
i) Si N est de rang 1, c'est à dire $N \simeq \mathbb{Z}$ alors les seuls cônes convexes polyédraux pointés sont $\sigma = \{0\}$, $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $\sigma = \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

On remarquera que si σ est un cône convexe polyédral pointé pour un réseaux de rang n c'est alors aussi un cône convexe polyédral pointé pour un réseau de rang $n+1$ pour le plongement naturel.

ii) Dans le cas d'un réseau de rang 2 :



$\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ est un cône convexe polyédral pointé

Définition 1.2.8. Étant donné un cône convexe polyédral σ dans $N_{\mathbb{Q}}$ on appelle *cône dual* de σ, le cône dans $M_{\mathbb{Q}}$ défini par :

$$\sigma^{\vee} := \{v \in M_{\mathbb{Q}} \mid \forall u \in \sigma \ \langle u, v \rangle \geq 0\} \subseteq M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Celui-ci est constitué de toutes les formes linéaires positives ou nulles sur σ. De plus $\sigma^{\vee}$ est un cône convexe polyédral dans $M_{\mathbb{Q}}$ et $\sigma = (\sigma^{\vee})^{\vee}$(voir [C-L-Sc]).

Définition 1.2.9. Étant donné σ un cône convexe polyédral dans $N_{\mathbb{Q}}$, on appelle *intérieur relatif* et on note $relint(\sigma)$ l'ensemble suivant :

$$relint(\sigma) := \{u \in \sigma \mid \forall m \in \sigma^{\vee},\ \langle m, u \rangle > 0\}.$$

Définition 1.2.10. Étant donné σ un cône convexe polyédral dans $N_{\mathbb{Q}}$, on appelle *face du cône* σ et on note $\tau \preccurlyeq \sigma$ l'ensemble $\sigma \cap H_m$ pour tout $m \in \sigma^{\vee}$ et pour :

$$H_m := \{u \in N_{\mathbb{Q}} \mid = \langle m, u\rangle = 0\}.$$

Définition 1.2.11. On appelle *éventail* dans $N_{\mathbb{Q}}$ une collection de cônes convexes rationnels satisfaisant :
i) Pour tout $\sigma \in \Sigma$, chaque face de σ est encore un cône dans Σ.
ii) L'intersection de deux cônes $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, est une face de σ_1 et de σ_2.

L'ensemble Σ est partiellement ordonné par l'inclusion.

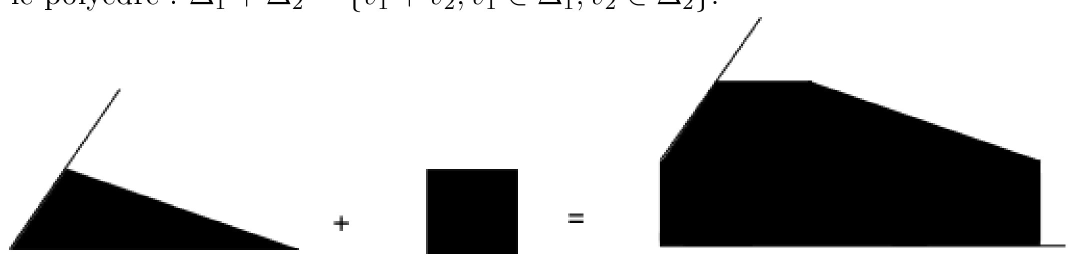
Définition 1.2.12. On appelle *polytope rationnel* l'enveloppe convexe d'un nombre fini de point dans $N_{\mathbb{Q}}$. On notera les polytopes Π.

$$\Pi = Conv(S) = \{\sum_{u\in S}\lambda_u u \mid \lambda_u \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \sum_{u\in S}\lambda_u = 1\}$$

Définition 1.2.13. On appelle *polyèdre convexe rationnel* l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces affines dans $N_{\mathbb{Q}}$. On notera les polyèdres convexes rationnels Δ.

Tout polyèdre convexe admet une décomposition $\Delta = \Pi_\Delta + \sigma_\Delta$ ou Π_Δ est un polytope, σ_Δ un cône convexe polyédral pointé et où la somme est la somme de Minkowski. De plus le cône σ_Δ considéré dans la décomposition est unique [O, Théorème A.13]. On l'appelle *cône de récession* de Δ.

On rappelle que la somme de Minkowski de deux polyèdres Δ_1 et Δ_2 dans $N_{\mathbb{Q}}$ est le polyèdre : $\Delta_1 + \Delta_2 = \{v_1 + v_2, v_1 \in \Delta_1, v_2 \in \Delta_2\}$.



La somme de Minkowski de deux polyèdres convexes rationnels ayant le même cône de récession σ est un polyèdre convexe rationnel ayant σ comme cône de récession.

Définition 1.2.14. Étant donné un cône polyédral $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ on note $\mathrm{Pol}^+_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ l'ensemble des polyèdres convexes dans $N_{\mathbb{Q}}$ ayant σ comme cône de récession. $\mathrm{Pol}^+_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ est un semi-groupe abélien pour la somme de Minkowski avec σ comme élément neutre.

1.2.3 Diviseurs à coefficients entiers, rationnels, polyédraux

On considère Y un schéma noethérien, séparé et normal. Dans un premier temps on introduit la notion de diviseur entier sur Y. On définit ensuite les $\mathbb{Q}$-diviseurs et les diviseurs à coefficients polyédraux.

1.2.3.1 Diviseurs de Weil et de Cartier.

Définition 1.2.15.

i) Un *diviseur premier* sur Y est un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 de Y.

ii) Un *diviseur de Weil* sur Y est une somme formelle finie $D = \sum n_Z Z$ de diviseurs premiers où $n_Z \in \mathbb{Z}$. On note $\mathrm{WDiv}(Y)$ l'ensemble des diviseurs de Weil sur Y.

iii) Un diviseur est dit *effectif* si $n_Z \geq 0$ pour tout Z.

iv) Le *support* de D est la réunion des diviseur premiers $Z \subset Y$ tel que $n_Z \neq 0$.

Définition 1.2.16.

i) Un diviseur est dit *principal* si il est le diviseur d'une fonction rationnelle non nulle f. On le note $\mathrm{div}(f) = \sum \nu_Z(f) Z$ où l'entier $\nu_Z(f)$ correspondant à l'ordre de f le long de Z.

ii) Deux diviseurs sont *linéairement équivalents* si leur différence est un diviseur principal.

Définition 1.2.17.

i) Soit Y une variété normale. Un diviseur de Weil D sur Y est *localement principal* s'il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de Y et des fonctions rationnelles f_i sur Y tel que $D \cap U_i = \mathrm{div}(f_i)_{|U_i}$.

ii) Soient D et D' deux diviseurs de Weil localement principaux sur Y donnés respectivement par (U_i, f_i) et par (V_j, g_j), alors D et D' coïncident si f_i/g_j est une fonction rationnelle inversible sur $U_i \cap V_j$ pour tout i et j.

iii) Un *diviseur de Cartier* sur Y est la donnée d'une classe d'équivalence de diviseurs de Weil localement principaux. L'ensemble des diviseurs de Cartier sur Y est noté $\mathrm{CDiv}(Y)$.

Remarque 1.2.18. On a supposé que la variété Y était normale ainsi on peut associer à un diviseur de Cartier D défini par une famille (U_i, f_i) un diviseur de Weil :

$$\sum_Y n_Z Z,$$

où n_Z est l'entier $\nu_Z(f_i)$ correspondant à l'ordre de f_i en Z pour n'importe quel i tel que $Z \cap U_i$ soit non vide. Cette somme est une somme finie (voir [Har, Lemme 6.1]).

Définition 1.2.19. Un diviseur de Cartier est effectif s'il a une représentation (U_i, f_i), où les fonctions f_i sont régulières sur U_i. Dans ce cas toutes ses représentations sont alors régulières.

Pour un diviseur de Weil D sur une variété Y donnée on peut définir un sous faisceau du faisceau constant $\mathbb{C}(Y)$ des fonctions rationnelles sur Y :

$$\mathcal{O}_Y(D)(U) = \{f \in \mathbb{C}(Y) \mid \mathrm{div}(f) + D_{|U} \geq 0\} \cup \{0\} \in \mathbb{C}(Y).$$

L'espace des sections globales de $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D))$ s'identifie à un $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$-module constitué des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D.

1.2.3.2 $\mathbb{Q}$-diviseurs de Weil et de Cartier

Définition 1.2.20.

i) Un $\mathbb{Q}$-*diviseur de Weil* sur Y est une somme formelle finie $D = \sum q_Z Z$ de diviseurs premiers où $q_Z \in \mathbb{Q}$. L'ensemble des $\mathbb{Q}$-diviseurs de Weil sur Y est donc $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{WDiv}(Y)$.

ii) Un $\mathbb{Q}$-*diviseur de Cartier* est un élément de l'ensemble $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{CDiv}(Y)$.

On remarquera qu'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil principal est un diviseur principal, en particulier tous ses coefficients sont entiers.

De la même manière que pour les diviseurs de Weil, pour tout $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil $D = \sum q_i D_i$, l'espace des sections globales de $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D))$ s'identifie a un $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$-module constitué des diviseurs effectifs linéairement équivalents à $\lfloor D \rfloor$ où $\lfloor D \rfloor = \sum \lfloor q_i \rfloor \cdot D_i$ et $\lfloor q_i \rfloor$ est la partie entière de q_i.

Définition 1.2.21.

i) Un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D sur Y est dit *semi-ample* si pour m assez grand l'ensemble des complémentaires des supports des diviseurs effectifs linéairement équivalents à mD recouvre Y.

ii) Un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D sur Y est dit *abondant* si pour m assez grand il existe un diviseur effectif linéairement équivalent à mD dont le complémentaire du support soit affine.

1.2.3.3 Diviseurs polyédraux

Soit N un réseau et σ un cône convexe polyédral rationnel, on construit des diviseurs ayant pour coefficients des polyèdres convexes appartenant au semi-groupe $\mathrm{Pol}^+_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$, pour définir une évaluation compatible entre ceux-ci et l'ensemble des $\mathbb{Q}$-diviseurs sur Y.

Définition 1.2.22. Un *diviseur σ-polyédral* $\mathcal{D}$ sur une variété algébrique Y est la donnée d'un élément :

$$\mathcal{D} = \sum \Delta_i \otimes D_i \in \mathrm{Pol}^+_\sigma(N_\mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{WDiv}(Y),$$

où les D_i sont des diviseurs premiers sur Y et les Δ_i des polyèdres convexes avec σ comme cône de récession, $\Delta_i = \sigma$ sauf pour un nombre fin de polyèdres.

Pour tout élément $u \in \sigma^\vee \cap M$, la dualité $\langle .,. \rangle$ entre $M_\mathbb{Q}$ et $N_\mathbb{Q}$ induit une application de $\mathrm{Pol}^+_\sigma(N_\mathbb{Q})$ dans $\mathbb{Q}$ définie par $\Delta \mapsto \min\limits_{v\in\Delta} \langle u, v\rangle$. Cette application est bien définie car les cônes considérés sont des cônes pointés convexes de sorte que le minimum existe et est unique.

On en déduit une application :

$$((\sigma^\vee \cap M), (\mathrm{Pol}^+_\sigma(N_\mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{WDiv}(Y))) \to \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{WDiv}(Y)$$

$$(u, \sum \Delta_i \otimes D_i) \to \mathcal{D}(u) = \sum \min_{v\in\Delta_i} \langle u, v\rangle\, D_i$$

qui a tout $u \in \sigma^\vee \cap M$ et tout diviseur σ-polyédral $\mathcal{D}$ sur Y associe le $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil, $\mathcal{D}(u) = \sum \min\limits_{v\in\Delta_i} \langle u, v\rangle\, D_i$ sur Y.

L'analogue des diviseurs principaux dans le cas des diviseurs polyédraux est le suivant :

Définition 1.2.23. Une *plurifonction* $f = \sum v_i \otimes f_i \in N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}(Y)^*$ sur Y respectant le réseau N est la donnée de points $v_i \in N$ et de fonctions $f_i \in \mathbb{C}(Y)^*$.

Pour toute plurifonction $f = \sum v_i \otimes f_i$ on a une évaluation :

$$M = Hom(N, \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}(Y)^*,$$

donnée pour tout $u \in M$ par $f(u) = \prod f_i^{\langle u, v_i\rangle}$.

Définition 1.2.24. Le *diviseur principal σ-polyédral* d'une plurifonction $f = \sum v_i \otimes f_i$ est le diviseur polyédral $\mathrm{div}(f) = \sum (v_i + \sigma) \otimes \mathrm{div}(f_i) \in \mathrm{Pol}^+_\sigma(N_\mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{WDiv}(Y)$.

Définition 1.2.25. Un *diviseur polyédral propre* $\mathcal{D}$ sur Y, abrégé *p-diviseur,* est un diviseur σ-polyédral $\mathcal{D} = \sum \Delta_i \otimes D_i$ sur Y satisfaisant les propriétés suivantes :

i) Pour tout i, D_i est un diviseur premier.

ii) Pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$, $\mathcal{D}(u)$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier sur Y.

iii) Pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$, $\mathcal{D}(u)$ est semi-ample.

iv) Pour tout $u \in \mathrm{relint}(\sigma^\vee) \cap M$, $\mathcal{D}(u)$ est abondant.

1.3 $\mathbb{T}$-variétés normales

Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une $\mathbb{T}$-variété, c'est-à-dire, une variété affine normale munie d'une action effective d'une tore algébrique $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{G}_m)^k$ pour un certain entier k. La description d'une telle variété X, ou plus précisément de son anneau de fonctions régulières A munie de la graduation correspondante, à l'aide d'un couple $(Y, \mathcal{D})$ est due à Altmann et Hausen (voir [A-H]). Dans cette présentation, Y est une variété de dimension $\dim(X) - \dim(\mathbb{T})$ et $\mathcal{D}$ un p-diviseur sur Y. Cette présentation est la généralisation de deux descriptions déjà existantes : d'une part la description purement combinatoire à l'aide de cônes dans un réseau pour le cas des variétés toriques [C-L-Sc, Fu, O], et d'autre part la description des $\mathbb{G}_m$-variétés à l'aide de $\mathbb{Q}$-diviseurs ([D, F-Z1]).

On remarquera que l'on considère des variétés uniquement affines mais la description de Altmann et Hausen à été généralisée dans [A-H-Sü] au cas des variétés projectives.

Définition 1.3.1. Pour une $\mathbb{T}$-action sur une variété X la complexité est définie comme la codimension d'une orbite générale.

Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une variété affine munie d'une action de $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$ correspondant à une graduation $A = \bigoplus_{u \in M} A_u$. On appelle *cône de poids* de A le cône polyédral dans $M_\mathbb{Q}$ engendré par les éléments $u \in M$ tel que $A_u \neq \{0\}$.

L'action est effective si et seulement si le cône de poids et de dimension maximale dans le réseau des caractères, et pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$ on a $A_u \neq \{0\}$

Si l'action du tore est effective alors la complexité de l'action est donnée par $\dim(X) - \dim(\mathbb{T})$. A partir de maintenant toutes les actions considérées seront supposées effectives.

1.3.1 $\mathbb{T}$-variétés normales

Définition 1.3.2. Une variété Y est dite semi-projective si le morphisme $\pi : Y \to \mathrm{Spec}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y))$ est projectif et $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est de type fini.

Exemple 1.3.3.

i) Si Y est affine ou projective alors Y est semi-projective.

ii) L'éclatement $Y' \to Y$, de Y une variété affine, le long d'un sous-schéma est semi-projectif.

Théorème 1.3.4. *[A-H] Pour tout p-diviseur $\mathcal{D}$ sur une variété normale et semi-projective Y, le schéma :*

$$\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}) := \mathrm{Spec}\Big(\bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u)))\Big)$$

est une $\mathbb{T}$-variété affine normale de dimension $\dim(Y) + \dim(\mathbb{T})$.

Réciproquement toute $\mathbb{T}$-variété affine normale est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ pour un couple $(Y, \mathcal{D})$ bien choisi.

Pour une $\mathbb{T}$-variété X donnée, il n'y a pas en général unicité du couple $(Y, \mathcal{D})$, par exemple $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D} + \mathrm{div}(f))$ où f est une plurifonction (voir définition 1.2.23). De même la variété Y n'est pas unique (voir [A-H, corollaire 8.12]).

L'existence d'une application qui pour tout u, $u' \in \sigma^\vee \cap M$ est définie par :

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u))) \otimes \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u'))) \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u + u'))),$$

garantit que $\bigoplus\limits_{u \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u)))$ est bien une algèbre graduée. Cette application est bien déterminée. En effet l'évaluation $\min\limits_{v \in \Delta_i} \langle u, v \rangle$ avec les notations précédentes est une évaluation convexe car σ est un un cône convexe polyédral dans $N_\mathbb{Q}$(voir [O, Appendice A]), ainsi pour tout $u, u' \in \sigma^\vee \cap M$ on a $\mathcal{D}(u) + \mathcal{D}(u') \leq \mathcal{D}(u + u')$. De plus $\mathcal{D}$ étant un p-diviseur l'algèbre M-graduée ainsi obtenue est de type fini, l'hypothèse que $\mathcal{D}$ est semi-ample intervient a ce moment de la construction (voir [A-H, p.14]). Ainsi l'algèbre construite correspond à l'anneau des fonctions d'une variété affine munie d'une action du tore $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$.

Exemple 1.3.5.

i) On considère $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda x, \lambda y)$. L'anneau des fonctions régulières est ainsi naturellement $\mathbb{Z}$-gradué, le bon quotient pour paramétrer les orbites de cette action est $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}_\mathbb{C}(\mathbb{C}[x, y])$(voir 1.1.17). On peut alors identifier $\mathbb{C}[x, y]$ muni de la graduation correspondante avec l'algèbre $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ pour $n \geq 0$ s'identifiant aux polynômes homogènes de degré n pour la graduation usuelle. Cette identification se traduit en terme de p-diviseurs de la manière suivante :

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{S}(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}) = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{D}(u)))),$$

en posant $\mathcal{D} = [1, \infty[\otimes \{0\} \in \mathrm{Pol}^+_\sigma(\mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{WDiv}(\mathbb{P}^1)$.

En effet, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{D}(u)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(u)$ si $u \geq 0$.

ii)[A-H, section 12] On considère la variété

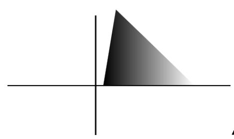
$$X = \{x^3 + y^4 + zt\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

munie de l'action de $(\mathbb{G}_m)^2$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donnée par $(\lambda_1, \lambda_2)\cdot(\lambda_1^4 x, \lambda_1^3 y, \lambda_2 z, \lambda_1^{12}\lambda_2^{-1} t)$.

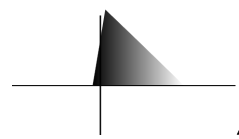
Alors X est isomorphe de manière équivariante à :

$$\mathbb{S}(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}) \text{ où } \mathcal{D} = \Delta_0 \otimes \{0\} + \Delta_1 \otimes \{1\} + \Delta_\infty \otimes \{\infty\},$$

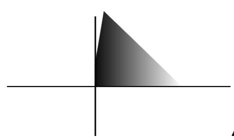
avec $\Delta_0 = (1/3, 0) + \sigma$, $\Delta_1 = (-1/4, 0) + \sigma$, $\Delta_\infty = \{0\} \times [0, 1] + \sigma$ et σ est le cône généré par les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, 12)$.



Δ_0



Δ_1



Δ_∞

Dans ce dernier exemple on constate que contrairement à i) l'algèbre n'est pas engendrée en degré 1. En effet les générateurs de l'algèbre des fonctions régulières de $\mathbb{A}^4$, et donc de X, que sont (x, y, z, t) sont des semi-invariants pour l'action de $(\mathbb{G}_m)^2$ et appartiennent aux A_0-module $A_{(4,0)}$, $A_{(3,0)}$, $A_{(0,1)}$ et $A_{(12,-1)}$ respectivement.

1.3.2 Construction d'un couple quotient d'après Altmann et Hausen

Pour construire la variété semi-projective Y qui apparaît dans la description d'une $\mathbb{T}$-variété dans le Théorème 1.3.4, on utilise une partie des définitions et des notions de la partie précédente. En effet la variété Y est obtenue à l'aide la la théorie des invariants géométriques. La construction générale n'est pas celle utilisée pour un calcul effectif d'une présentation mais c'est celle qui sera utilisée pour les preuves des théorèmes de cette thèse. Dans la pratique pour une action de tore explicite sur une variété affine normale donnée, on utilisera la section suivante dans le cas des actions d'un tore de dimension 1, et dans le cas général on utilisera la méthode décrite dans [A-H, section 11].

1.3.2.1 Construction du quotient A-H

Définition 1.3.6. La variété Y correspondant à une $\mathbb{T}$-variété X construite à l'aide de la méthode ci-dessous sera appelée *le quotient A-H* de X.

Soit M un réseau, $\mathbb{T} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$ et $X = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{u \in M} A_u)$ une $\mathbb{T}$-variété. Pour construire $Y(X)$ on considère pour tout $u \in M$ l'ensemble $X^{ss}(u)$ des points semi-stables,

$$X^{ss}(u) := \{x \in X \,/\, \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\; et\; f \in A_{nu}\; tel\; que\; f(x) \neq 0\}\,.$$

Pour tout $u \in M$, $X^{ss}(u)$ est un ouvert $\mathbb{T}$-invariant de X qui admet d'après le Théorème 1.1.23 un bon quotient Y_u :

$$Y_u = X^{ss}(u)//\mathbb{T} = \mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_{nu}) \to \mathrm{Spec}(A_0),$$

qui est semi-projectif au dessus de $\mathrm{Spec}(A_0)$.

On peut se restreindre à un nombre fini d'éléments $u \in M$. Plus précisément, d'après [Be-H, section 2], il existe un éventail $\Lambda \in M_{\mathbb{Q}}$ engendré par un nombre fini de cônes λ ayant les propriétés suivantes :

i) pour tout u et u' dans l'intérieur relatif de λ, $X^{ss}(u) = X^{ss}(u')$. On notera $W_\lambda = X^{ss}(u)$ pour tout $u \in relint(\lambda)$.

ii) Si γ est une face de λ alors W_λ est un ouvert de W_γ. On pose alors :

$$W = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda = \lim_{\leftarrow} W_\lambda.$$

Les applications quotients : $q_\lambda : W_\lambda \to W_\lambda//\mathbb{T}$ forment un système inverse indexé par les cônes de l'éventail Λ. La limite existe comme produit fibré d'un nombre fini de variétés Y_u et est donné par le morphisme $q : W \longrightarrow Z = \lim_{\leftarrow} Y_\lambda$. En particulier la normalisation $Y(X)$ de l'adhérence de l'image de W par q est semi-projectif au dessus de $\mathrm{Spec}(A_0)$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & W_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "q_\lambda"'] & W_\gamma \arrow[r] \arrow[d, "q_\gamma"'] & X \arrow[dd, "q_0"'] \\
Z \arrow[r] \arrow[drrr] & Y_\lambda \arrow[r] \arrow[drr] & Y_\gamma \arrow[dr] & \\
 & & & Y_0 = \mathrm{Spec}(A_0)
\end{tikzcd} .$$

Exemple 1.3.7. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$ muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x,y,z) \to (\lambda x, \lambda^{-1}y, \lambda z)$. Ainsi $\mathbb{C}[x,y,z]$ est $\mathbb{Z}$-gradué, $\mathbb{C}[x,y,z] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ avec $A_0 = \mathbb{C}[u,v]$ où $u = yz$ et $v = yx$ ainsi $Y_0(\mathbb{A}^3) \simeq \mathbb{A}^2_{(u,v)}$. De plus on observe que l'algèbre est engendrée en degré 1, c'est-à-dire, par A_0, A_1 et A_{-1}.

On a d'une part $A_{-n} = A_0 \cdot y^n \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ car tous les polynômes semi-invariant de poids négatif sont divisibles par y ce qui implique :

$$Y_{-1}(\mathbb{A}^3) \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_0.y^n) \simeq Y_0(\mathbb{A}^3) \simeq \mathbb{A}^2.$$

D'autre part, $\bigoplus_{n\in\geq 0} A_n \simeq \mathrm{Sym}_{A_0} A_1$ où A_1 est le A_0-module libre engendré par x et z, ainsi :

$$Y_{+1}(\mathbb{A}^3) \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n) \simeq \tilde{\mathbb{A}}^2,$$

où $\tilde{\mathbb{A}}^2$ correspond à l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ à l'origine.

On obtient le quotient A-H de $\mathbb{A}^3$ comme le produit fibré de $Y_{-1}(\mathbb{A}^3)$ et $Y_{+1}(\mathbb{A}^3)$ au dessus de $\mathrm{Spec}(A_0)$:

$$Y(\mathbb{A}^3) \quad = \quad Y_{-1}(\mathbb{A}^3) \times_{Y_0(\mathbb{A}^3)} Y_{+1}(\mathbb{A}^3) \simeq \tilde{\mathbb{A}}^2.$$

1.3.2.2 Construction de p-diviseurs

La construction des p-diviseurs est effectuée dans la preuve de [A-H, Théorème 3.4], et cette construction laisse un choix pour construire un p-diviseur sur Y correspondant à $X = \mathrm{Spec}(A)$ une $\mathbb{T}$ -variété. Celui-ci n'est totalement déterminé que modulo le choix d'un homomorphisme de groupe $h : M \to \mathrm{Frac}(A)$, tel que pour tout $u \in M$, $h(u)$ est semi-invariant de poids u. Un tel h étant fixé, si $u \in \sigma^\vee \cap M$ est un *élément saturé*, c'est-à-dire, un élément $u \in \sigma^\vee \cap M$ tel que l'anneau $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_{nu}$ est généré en degré 1, il existe un unique diviseur de Cartier $\mathcal{D}(u)$ tel que : $A_u = h(u).\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u)))$. Les équations locales de ce diviseur sur les ouverts Y_s complémentaires du support de $s \in A_u$ sont données par $h(u)/s$. Si $u \in \sigma^\vee \cap M$ n'est pas un élément saturé on considère un multiple de u suffisamment grand pour être un élément saturé et on effectue la construction.

Une autre méthode possible pour construire un p-diviseur $\mathcal{D}$ correspondant a une $\mathbb{T}$-variété $X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ consiste à se ramener au cas torique. Cette méthode, développée dans [A-H, section 11], procède comme suit :

On peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est plongée dans $\mathbb{A}^n$ avec n suffisamment grand pour que X soit réalisé comme sous-variété $\mathbb{T}$-stable d'une variété torique pour un certain tore $\mathbb{T}' = (\mathbb{G}_m)^n$ contenant $\mathbb{T}$ (voir [H]). En effet les générateurs, $x_1, \dots, x_n$ de l'anneau $A = \bigoplus_{u \in M} A_u$, où $A_u = \{f \in A \mid \forall \lambda \in \mathbb{T}, \lambda \cdot f_u = \chi^u(\lambda) f_u\}$, sont des semi-invariants pour l'action de $\mathbb{T}$, ainsi $x_i \in A_{u_i}$. La variété torique que l'on considère est alors $\mathbb{A}^n$.

L'inclusion $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{T}'$ va ainsi correspondre à une inclusion du réseau N des sous-groupes à un paramètre du tore $\mathbb{T}$ dans celui N' du tore $\mathbb{T}'$. On obtient alors la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \simeq \mathbb{Z}^k \arrow[r, "F"'] & N' \simeq \mathbb{Z}^n \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, "P"'] & N'/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

tel que F soit donné par l'action de $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{A}^n$ et que s soit une section de F $(s \circ F = id)$.

La variété torique pour le tore $\mathbb{T}'$ est alors obtenue en considérant les cônes unidimensionnels engendrés par chaque vecteur colonne de la matrice P et pour chacun de ces cônes on prend le premier vecteur à coefficients entiers. On notera ce vecteur v_i pour la i-ème colonne. L'ensemble des v_i forme un éventail dans $\mathbb{Z}^n$ et chacun correspond à un diviseur torique. Le support de D_i qui apparait dans la décomposition de $\mathcal{D} = \sum \Delta_i \otimes D_i$ est alors l'intersection de X avec le diviseur torique correspondant à v_i. Les polyèdres $\Delta_i = s(\mathbb{R}^n_{\geq 0} \cap P^{-1}(v_i))$ sont formés des polytopes Π_i et du cône de récession $\sigma := s(\mathbb{Q}^n_{\geq 0} \cap F(\mathbb{Q}))$.

Exemple. (Suite de l'exemple 1.3.7)
Pour la construction du p-diviseur correspondant a cette action sur $\mathbb{A}^3$ on considère alors la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \simeq \mathbb{Z} \arrow[r, "F"'] & N' \simeq \mathbb{Z}^3 \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, "P"'] & N'/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

Avec $F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = (1,0,0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On remarquera au passage que la variété torique admettant comme rayons les vecteurs colonnes de P est bien $\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}$.

De plus on a $\sigma = s(\mathbb{Q}^n_{\geq 0} \cap F(\mathbb{Q})) = \{0\}$ ainsi en appliquant la formule $\Pi_i = s(\mathbb{R}^n_{\geq 0} \cap P^{-1}(v_i)) = \Delta_i$,$\Delta_1 = \{1\}$, $\Delta_2 = \{0\}$ et $\Delta_3 = [0,1]$, on obtient :

$$\mathcal{D} = \{1\} \otimes D_1 + [0,1] \otimes E,$$

où D_1 est le transformé strict de $\{u=0\}$ et E correspond au diviseur exceptionnel de l'éclatement.

$\mathbb{A}^3$ muni de l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$, $\lambda \cdot (X,Y,Z) \to (\lambda X, \lambda^{-1}Y, \lambda Z)$ est donc isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$.

Remarquons que $D_1 + E$ est un diviseur principal sur $\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}$ on a ainsi $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}' = [-1,0] \otimes E$. Ceci correspond à un autre choix de section $s' = (0,0,-1)$. Donc $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D}')$.

Remarque 1.3.8. En particulier si $X \simeq \mathbb{A}^n$ est muni d'une action linéaire d'un tore $\mathbb{T}$ de dimension $\dim(\mathbb{T}) < n$, la variété torique considérée est donc $\mathbb{A}^n$ lui même. Ainsi la variété $Y(X)$ et les supports des diviseurs sont totalement déterminés par l'utilisation des variétés torique et un plongement. Cette remarque sera exploitée dans la section 4.

1.3.3 Morphismes équivariants, applications entre p-diviseurs

On va à présent définir les applications entre p-diviseurs. L'idée étant qu'un morphisme entre des p-diviseurs sur des quotients A-H, $(Y, \mathcal{D})$ et $(Y', \mathcal{D}')$, devrait correspondre à un morphisme équivariant pour les variétés correspondantes. Soit Y et Y' deux variétés normales et semi-projectives, N et N' deux réseaux et σ et σ' deux cônes pointés convexes inclus respectivement dans $N_{\mathbb{Q}} \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $N'_{\mathbb{Q}} \simeq N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On considère de plus $\mathcal{D} = \sum \Delta_i \otimes D_i$ et $\mathcal{D}' = \sum \Delta'_i \otimes D'_i$ deux p-diviseurs avec pour cônes de récessions σ et σ' sur Y et Y' respectivement.

Définition 1.3.9.

i) Soit $\varphi : Y \to Y'$ un morphisme tel que $\varphi(Y)$ n'est inclus dans aucun des support des D'_i pour tout i. Alors *l'image inverse polyédrale* de $\mathcal{D}'$ est donné par :

$$\varphi^*(\mathcal{D}') := \sum \Delta'_i \otimes \varphi^*(D'_i),$$

où $\varphi^*(D'_i)$ est l'image inverse de D'_i par φ. On a alors $\varphi^*(\mathcal{D}')$ qui est un diviseur σ'-polyédral sur Y.

ii) Soit Y fixé, $F : N \to N'$ une application linéaire tel que $F(\sigma) \subset \sigma'$. Alors *l'image directe polyédrale* de $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$F_*(\mathcal{D}) := \sum (F(\Delta_i) + \sigma') \otimes D_i,$$

c'est un diviseur σ-polyédral sur Y.

Ainsi chaque application entre p-diviseurs est complètement déterminée par un triplet (φ, F, f) constitué d'un morphisme dominant $\varphi : Y \to Y'$, d'une application linéaire $F : N \to N'$ et d'une plurifonction $f \in N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[Y])^*$ telle que :

$$\varphi^*(\mathcal{D}') \leq F_*(\mathcal{D}) + \mathrm{div}(f).$$

Ce triplet donne un morphisme dominant et équivariant (voir §1.1.7). Ce sont ces morphisme que l'on va considérer. En général, une description complète des morphismes équivariant de $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ vers $\mathbb{S}(Y', \mathcal{D}')$ est obtenue via [A-H, Théorème 8.8].

L'application identité entre p-diviseurs correspond au triplet $(\mathrm{id}, \mathrm{id}, 1)$. Quant à la composition de deux telles applications (φ, F, f) et (φ', F', f') elle est donnée par $(\varphi' \circ \varphi, F' \circ F, F'_*(f).\varphi^*(f'))$.

1.4 $\mathbb{G}_m$-variétés

On va, dans cette section, détailler le cas des actions du groupe $\mathbb{G}_m$ sur des variétés X qui seront normales, voire lisses. Cette spécialisation de la section précédente a un double objectif. On veut premièrement faire le lien entre la présentation A-H et celle donnée par Flenner et Zaidenberg dans le cas des surfaces. Le deuxième objectif est de donner une construction beaucoup plus effective pour le cas des actions dites *hyperboliques* de $\mathbb{G}_m$ sur des variétés lisses.

On rappelle que si on considère une variété affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ munie d'une action de $\mathbb{G}_m$ alors A est naturellement $\mathbb{Z}$-graduée, $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

Définition 1.4.1. Une action de $\mathbb{G}_m$ est dite *hyperbolique* si il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ avec $n_1 < 0$ et $n_2 > 0$ tel que A_{n_1} et A_{n_2} soient non vides.

Si l'action de $\mathbb{G}_m$ est hyperbolique alors la présentation A-H se simplifie. On a $\sigma = \{0\}$, ceci découle directement de la formule $\sigma := s(\mathbb{Q}^n_{\geq 0} \cap F(\mathbb{Q}))$ donnée dans §1.3.2.2. Ceci implique pour des p-diviseurs, $\mathcal{D} = \sum \Delta_i \otimes D_i$ que $\Delta_i = \Pi_i$, or dans ce cas les réseaux M et N sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ et Π_i est soit un singleton soit un intervalle fermé avec des bornes rationnelles.

Ainsi l'algèbre A peut s'écrire :

$$A = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \oplus_{n<0}\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(nD_-)) \oplus \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \oplus_{n>0} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(nD_+)),$$

pour un triplet (Y, D_+, D_-) constitué du quotient A-H Y et de deux $\mathbb{Q}$-diviseurs D_+ et D_- sur Y.

Les diviseurs encodent chacun une partie, soit positive, soit négative de l'algèbre. Dans la section précédente les hypothèses de abondant et semi-ample pour le p-diviseur sont indispensables pour la construction de l'algèbre graduée. Dans le cas d'un tore de dimension 1, les $\mathbb{Q}$-diviseurs doivent vérifier certaines propriétés pour que les deux parties se rassemblent correctement pour obtenir une structure d'algèbre graduée. Cela est obtenu en posant comme hypothèse que D_+ et D_- vérifient $D_+ + D_- \leq 0$ cela donne alors pour $n \geq m \geq 0$:

$$\llcorner nD_+ \lrcorner + \llcorner mD_- \lrcorner \leq \llcorner (n-m)D_+ \lrcorner,$$

et ainsi $A_n \cdot A_{-m} \subset A_{n-m}$.

1.4.1 Surfaces normales et action de $\mathbb{G}_m$

Revenons au cas le plus simple d'action de $\mathbb{G}_m$ après les variétés toriques c'est-à-dire le cas des surfaces (voir [F-Z1]) dans ce cas le triplet (Y, D_+, D_-) est constitué d'une courbe normale et donc lisse Y et de deux $\mathbb{Q}$-diviseurs D_+ et D_- sur Y. Les supports des $\mathbb{Q}$ -diviseurs sont donc des points $y_i \in Y$.

Théorème 1.4.2. *[F-Z1] Soit S une surface normale munie d'une action de $\mathbb{G}_m$ alors les trois cas possibles sont :*

1) Le cas elliptique, $S = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ avec Y une courbe projective lisse et $\mathcal{D}$ est de la forme $\sum [q_i; \infty[\otimes \{y_i\}$.

2) Le cas parabolique, $S = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ avec Y une courbe affine lisse et $\mathcal{D}$ est de la forme $\sum [q_i; \infty[\otimes \{y_i\}$.

3) Le cas hyperbolique, $S = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ avec Y une courbe affine lisse et $\mathcal{D}$ est de la forme $\sum [q_i, p_i] \otimes \{y_i\}$.

Faisons le lien entre la présentation dite F-Z et la présentation A-H. La courbe Y est soit affine soit projective, si elle est projective alors $\sigma \neq \{0\}$ [A-H, exemple 3.5].

Le cas elliptique :

Il correspond au cas où l'action possède un unique point fixe attractif x_0 dans la surface $S = \mathrm{Spec}(A)$. Celui-ci est contenu dans la clôture de toutes les orbites de dimension 1. Dans ce cas le complémentaire du point fixe S' admet un bon quotient $\pi : S' \to Y$ avec Y projective. Y est alors la courbe utilisée dans la décomposition en terme de $\mathbb{Q}$-diviseurs. De plus l'anneau A est gradué uniquement en degrés positif $D = \sum \{q_i\} \otimes \{y_i\}$ avec $y_i \in Y$, $q_i \in \mathbb{Q}$ pour tout i.

Tout cela peut bien entendu se réécrire dans une présentation A-H. On conserve la même courbe projective Y. On a de plus $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $\mathcal{D} = \sum [q_i; \infty[\otimes \{y_i\}$ et la correspondance est donnée par :

$$D = \mathcal{D}(1) = \sum \{q_i\} \otimes \{y_i\}.$$

L'exemple le plus simple pour illustrer le cas elliptique est $\mathbb{A}^2$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Le cas parabolique :

Il correspond au cas où l'action possède un ensemble de points fixes de dimension 1 dans la surface $S = \mathrm{Spec}(A)$. L'anneau est dans ce cas lui aussi gradué en degré positif mais on a de plus A_0 qui est un anneau intègre correspondant à l'anneau des fonctions régulières d'une courbe affine Y. On a donc le quotient $\pi : S \to Y = \mathrm{Spec}(A_0)$ et $D = \sum \{q_i\} \otimes \{y_i\}$ avec$y_i \in Y$, $q_i \in \mathbb{Q}$ pour tout i .

La réécriture en terme de présentation A-H est donnée par la même courbe Y de plus $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $\mathcal{D} = \sum [q_i; \infty[\otimes \{y_i\}$. La correspondance est donnée par :

$$D = \mathcal{D}(1) = \sum \{q_i\} \otimes \{y_i\}.$$

On peut illustrer le cas parabolique en considérant le cylindre $Y \times \mathbb{A}^1$ au dessus d'une courbe affine Y.

Le cas hyperbolique :

Il correspond au cas ou l'anneau A est gradué à la fois en degré positif et négatif. On a donc le quotient $\pi : S \to Y = \mathrm{Spec}(A_0)$ et Y affine il faut alors deux diviseurs D_+ et D_- donnés respectivement par $D_+ = \sum\{q_i\} \otimes \{y_i\}$ et $D_- = \sum\{-p_i\} \otimes \{y_i\}$ vérifiant $D_+ + D_- \leq 0$ et $q_i, p_i \in \mathbb{Q}$ tel que $q_i \leq p_i$ pour tout i.

La réécriture en terme de présentation A-H est donnée par la courbe affine $Y = \mathrm{Spec}(A_0)$, $\sigma = \{0\}$, et le p-diviseur est alors $\mathcal{D} = \sum[q_i, p_i] \otimes \{y_i\}$avec $y_i \in Y$. La correspondance est donnée par :

$$D_+ = \mathcal{D}(1) = \sum\{q_i\} \otimes \{y_i\}$$

et

$$D_- = \mathcal{D}(-1) = \sum\{-p_i\} \otimes \{y_i\}.$$

Dans l'autre sens $\mathcal{D}$ est ré-obtenue à partir de D_+et D_- par : $\mathcal{D} = \{1\} \otimes D_+ - [0,1] \otimes (D_- + D_+)$.

L'exemple le plus simple pour illustrer le cas hyperbolique est $\mathbb{A}^2$ muni de l'action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$.

Ces trois cas sont les seuls possibles pour les actions de $\mathbb{G}_m$ sur des surfaces. On va donner un exemple d'action elliptique sur une surface ainsi que deux cas d'actions hyperboliques sur des surfaces.

Exemple 1.4.3. Action elliptique :

On considère la surface $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^5))$, avec une action induite par une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$ définie par $\lambda \cdot (x, y, z) \to (\lambda^{15} x, \lambda^{10} y, \lambda^6 z)$. Alors la présentation F-Z de X est obtenue (voir [D, exemple 3.6]) avec

$$Y \simeq \mathbb{P}^1 \text{ et } D = \frac{1}{5}\{0\} + \frac{1}{3}\{\infty\} - \frac{1}{2}\{1\}.$$

De plus ce $\mathbb{Q}$-diviseur D correspond au p-diviseur

$$\mathcal{D} = [\frac{1}{5}; \infty[\otimes\{0\} + [\frac{1}{3}; \infty[\otimes\{\infty\} + [-\frac{1}{2}; \infty[\otimes\{1\}.$$

Exemple 1.4.4. Actions hyperboliques.

i) On considère $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donné par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y)$ alors $\mathbb{A}^2$ est obtenu avec $\mathbb{A}^1$ et la paire de $\mathbb{Q}$-diviseurs (D_+, D_-) donné par $D_+ = -\{0\}$ et $D_- = 0$, ce qui correspond à $\mathcal{D} = [-1, 0] \otimes \{0\}$.

ii) On considère la surface $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 y + x + z^2))$, avec une action induite par une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$ définie par $\lambda \cdot (x, y, z) \to (\lambda^2 x, \lambda^{-2} y, \lambda^1 z)$. Alors la présentation F-Z de X est obtenue avec $Y \simeq \mathbb{A}^1$ et la paire de $\mathbb{Q}$-diviseurs (D_+, D_-) donné par

$$D_+ = \frac{1}{2}\{1\} \text{ et } D_- = -\frac{1}{2}\{0\} - \frac{1}{2}\{1\}.$$

De plus ces $\mathbb{Q}$-diviseurs (D_+, D_-) correspondent au p-diviseur

$$\mathcal{D} = [0, \frac{1}{2}]\{0\} + \frac{1}{2}\{1\}.$$

.

1.4.2 Actions de $\mathbb{G}_m$ en complexité quelconque

On suppose désormais que $\mathbb{T} \simeq \mathbb{G}_m$ agit sur une variété $X = \mathrm{Spec}(A)$ de dimension quelconque. L'anneau A est donc muni d'une $\mathbb{Z}$-graduation, $A = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} A_m$. D'après le Théorème 1.3.4, X est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y(X), \mathcal{D})$, où $Y(X)$ est le quotient A-H construit en §1.3.2.1 et $\mathcal{D}$ un certain p-diviseur sur $Y(X)$. $Y(X)$ s'identifie à une des composantes irréductibles du produit fibré :

$$\mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} A_n) \underset{Y_0(X)}{\times} \mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n),$$

où $Y_0(X) \simeq X//\mathbb{G}_m \simeq \mathrm{Spec}(A_0)$ (voire [Do, T]).

Théorème 1.4.5. *Soit $X = \mathrm{Spec}(\oplus_{m\in\mathbb{Z}} A_m)$ une variété lisse munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$. Alors*

1) Le produit fibré $\mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} A_n) \underset{Y_0(X)}{\times} \mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n)$, est irréductible,

2) Y est isomorphe à l'éclatement de $X//\mathbb{G}_m$ le long du sous-schéma Z de l'idéal $\mathcal{I} = \langle A_d \cdot A_{-d}\rangle$où $d > 0$ est choisi de tel manière que $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_{dn}$ est généré par A_0 et $A_{\pm d}$.

Démonstration. [T, Théorème 1.9, proposition 1.4]. □

On va donner un exemple provenant de [T] illustrant le fait que ce produit fibré n'est pas nécessairement irréductible si les hypothèses du Théorème ne sont pas vérifiées.

Exemple 1.4.6. Soit $\mathbb{G}_m$ agissant $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[a, b, c, d])$ via l'action linéaire suivante $\lambda \cdot (a, b, c, d) \to (\lambda a, \lambda^{-1} b, \lambda c, \lambda^{-1} d)$.

On considère $R = \mathbb{C}[a^2, ab, b^2, c, d] \subset \mathbb{C}[a, b, c, d]$, I l'idéal engendré par $(ad - bc)$ et on pose alors $B = R/(R \cap I)$. On peut ainsi définir une variété normale mais singulière,

$$X = \mathrm{Spec}(B).$$

On a alors :

$$B^{\mathbb{G}_m} = R^{\mathbb{G}_m}/(R^{\mathbb{G}_m} \cap I),$$

et $R^{\mathbb{G}_m}$ est engendré par (ab, a^2d^2, cd, b^2c^2). Ainsi $B^{\mathbb{G}_m}$ est engendré par les classes de ab et cd et $X//\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}^2$.

De plus,$\mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} A_n)$ est isomorphe à l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ à l'origine que l'on notera $\tilde{\mathbb{A}}^2$ de même $\mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n)$ est isomorphe à l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ à l'origine par symétrie.

Alors le produit fibré est donc $\tilde{\mathbb{A}}^2 \underset{\mathbb{A}^2}{\times} \tilde{\mathbb{A}}^2$ qui contient deux composantes irréductibles l'une est isomorphe à $\tilde{\mathbb{A}}^2$ et l'autre est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Les deux composantes s'intersectent en une copie de $\mathbb{P}^1$. Ici $Y(X)$ est la composante $\tilde{\mathbb{A}}^2$.

L'éclatement défini dans le Théorème 1.4.5 n'est pas forcément le long d'un sous-schéma réduit, illustrons ceci.

Exemple 1.4.7. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y, z, t])$ muni de l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donné par $\lambda \cdot (y, z, t) = (\lambda^{-1}y, \lambda z, \lambda^2 t)$.

Dans ce cas

$$\mathbb{A}^3//\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[yz, y^2t]) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v]),$$

et $d > 0$ correspondant au nombre du Théorème 1.4.5 est le plus petit commun multiple des poids sur les générateurs correspondant à l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$. Ainsi $d = 2$ et on éclate $\mathbb{A}^2$ le long du sous-schéma d'idéal $((yz)^2, y^2t) \simeq (u^2, v)$ qui correspond à l'origine dans $\mathbb{A}^2$, mais le sous-schéma engendré n'est pas réduit.

Dans la suite on notera $\pi : \tilde{X}_I \to X$ l'éclatement de la variété affine X le long du sous-schéma d'idéal I. De plus, si X peut être plongée dans $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ alors $\pi : \tilde{X} \to X$ sera l'éclatement le long du sous-schéma d'idéal $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{A}^n$ restreint à X.

Proposition 1.4.8. *Soit l'espace affine :*

$$\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}]),$$

muni de l'action linéaire de$\mathbb{G}_m$ *donnée par :*

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}) \to (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k, \lambda^{-1}y_1, \ldots, \lambda^{-1}y_{n-k}).$$

Alors on a :

i) Si $k = n$, $Y(\mathbb{A}^n) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$

ii) Si $k = n-1$, $Y(\mathbb{A}^n) \simeq \tilde{\mathbb{A}}^{n-1}$, *où* $\tilde{\mathbb{A}}^{n-1}$ *correspond à l'éclatement de l'origine dans* $\mathbb{A}^{n-1}$.

iii) Dans le cas général $Y(\mathbb{A}^n) \simeq \tilde{Y}_0$, *où* $\pi : \tilde{Y}_0 \to Y_0$ *est l'éclatement de* $Y_0 = \mathbb{A}^n//\mathbb{G}_m$ *dans le sous-schéma correspondant à l'idéale* (x_iy_j) *pour* $i = 1, \ldots, k$ *et* $j = 1, \ldots, n-k$.

Démonstration. i) Si $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ est gradué uniquement en degré positif alors clairement :

$$\mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} A_n) \underset{Y_0(X)}{\times} \mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n) \simeq \mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n) \simeq \mathbb{P}^{n-1}.$$

ii) Si il existe une unique variable de poids négatif, y, alors :

$$Y_0(\mathbb{A}^n) \simeq \mathbb{A}^n /\!/ \mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}^{n-1} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[yx_1, \dots, yx_{n-1}]).$$

De plus la somme directe $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ est générée par A_0 et $A_{\pm 1}$, donc d'après le Théorème 1.4.5 :

$$\mathcal{I} = \langle A_1 \cdot A_{-1} \rangle = (yx_1, \dots, yx_{n-1}),$$

qui correspond à l'origine dans $\mathbb{A}^{n-1}$.

iii) Dans le cas général $Y_0(\mathbb{A}^n) \simeq \mathbb{A}^n /\!/ \mathbb{G}_m$ est générée par les éléments $u_{i,j} = x_i y_j$ pour $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n-k$ et par les déterminants des mineurs de taille 2×2 de la matrice : $\begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,n-k} \end{pmatrix}$ de taille $k \times (n-k)$.

La variété affine ainsi obtenue correspond au cône au-dessus du plongement de Segre de $\mathbb{P}^{k-1} \times \mathbb{P}^{n-k-1}$ dans $\mathbb{P}^{n(n-k)-1}$. De plus la somme directe $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ est générée par A_0 et $A_{\pm 1}$, donc d'après le Théorème 1.4.5 :

$$\mathcal{I} = \langle A_1 \cdot A_{-1} \rangle = (yx_1, \dots, yx_{n-1}).$$

$\square$

Exemple 1.4.9. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[Y, Z, T]) = \mathrm{Spec}(A)$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donné par $\lambda \cdot (Y, Z, T) = (\lambda^{-6} Y, \lambda^3 Z, \lambda^2 T)$.

Dans ce cas

$$\mathbb{A}^3 /\!/ \mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[YZ^2, YT^3]) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v]),$$

et l'entier $d > 0$ du Théorème 1.4.5 est alors le plus petit commun multiple des poids correspondant à l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$. Ainsi $d = 6$ et on éclate $\mathbb{A}^2$ le long du sous-schéma d'idéal $(YZ^2, YT^3) \simeq (u, v)$ c'est-à-dire l'origine de $\mathbb{A}^2$.

Montrons que $\mathbb{A}^3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{2}\right\} D_1 + \left\{\frac{-1}{3}\right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{6}\right] E$$

où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ à l'origine, D_1 et D_2 sont les transformés stricts de $\mathrm{div}(f_1) = \{u = 0\}$ et $\mathrm{div}(f_2) = \{v = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2$ respectivement.

Pour ce faire on calcule directement les A_0-modules $A_i \subset A$. On utilisera les faits suivants, si $m > 6$, on effectue la division euclidienne par 6, $m = 6p+k$ et on a alors $A_m = A_{6p} \cdot A_k = \mathrm{Sym}^p(A_6) \cdot A_k$, de la même manière, si $m < -6$ on effectue la division euclidienne par 6, $m = -6p - k$ et on a alors $A_m = (A_{-6})^p \cdot A_{-k}$.

si $m = 0$ alors

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}) = \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\},$$

ce qui donne $\mathbb{C}[u,v] = A_0$.

Pour le cas de la partie positive de l'algèbre graduée,

si $m = 1$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(1))) &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{3}D_2 \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) - D_2 \geq 0\} \cup \{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f \in (f_2)\,\mathbb{C}[u,v]$ et A_1 est un A_0-module généré par (x_1)

si $m = 2$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(2))) &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + D_1 - D_2 \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + D_1 - D_2 \geq 0\} \cup \{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f \in \left(\frac{f_2}{f_1}\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_2 est un A_0-module généré par (x_2)

si $m = 3$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(3))) &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + \tfrac{3}{2}D_1 - D_2 \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + D_1 - D_2 \geq 0\} \cup \{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f \in \left(\frac{f_2}{f_1}\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_3 est un A_0-module généré par (x_3)

si $m = 4$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(4))) &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + 2D_1 - \tfrac{4}{3}D_2 \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) + 2D_1 - 2D_2 \geq 0\} \cup \{0\},\end{aligned}$$

,

ainsi $f \in \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\mathbb{C}[u,v]$ et A_4 est un A_0-module généré par (x_4)

si $m=5$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(5))) &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)+\tfrac{5}{2}D_1-\tfrac{5}{3}D_2\geq 0\}\cup\{0\}\\ &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)+2D_1-2D_2\geq 0\}\cup\{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f\in\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\mathbb{C}[u,v]$ et A_5 est un A_0-module généré par (x_5)

si $m=6$ alors

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(6))) = \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)+3D_1-2D_2\geq 0\}\cup\{0\},$$

ainsi $f\in\left(\frac{f_2^2}{f_1^3}u,\frac{f_2^2}{f_1^3}v\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_6 est un A_0-module de rang 2 généré par $(x_{6,u},x_{6,v})$.

Pour le cas de la partie négative de l'algèbre graduée,

si $m=-1$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(-1))) &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-\tfrac{1}{2}D_1+\tfrac{1}{3}D_2-\tfrac{1}{6}E\geq 0\}\cup\{0\}\\ &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-D_1-E\geq 0\}\cup\{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f\in(f_1)\,\mathbb{C}[u,v]$ et A_{-1} est un A_0-module généré par (x_{-1})

si $m=-2$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(-2))) &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-D_1+\tfrac{2}{3}D_2-\tfrac{2}{6}E\geq 0\}\cup\{0\}\\ &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-D_1-E\geq 0\}\cup\{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f\in(f_1)\,\mathbb{C}[u,v]$ et A_{-2} est un A_0 -module généré par (x_{-2})

si $m=-3$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(-3))) &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-\tfrac{3}{2}D_1+D_2-\tfrac{3}{6}E\geq 0\}\cup\{0\}\\ &== \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-2D_1+D_2-E\geq 0\}\cup\{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f\in\left(\frac{f_1^2}{f_2}\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_{-3} est un A_0 -module généré par (x_{-3})

si $m=-4$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(-4))) &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-2D_1+\tfrac{4}{3}D_2-\tfrac{4}{6}E\geq 0\}\cup\{0\}\\ &= \{f\in\mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)})\mid \mathrm{div}(f)-2D_1+D_2-E\geq 0\}\cup\{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f\in\left(\frac{f_1^2}{f_2}\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_{-4} est un A_0-module généré par (x_{-4})

si $m=-5$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(-5))) &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) - \tfrac{5}{2}D_1 + \tfrac{5}{3}D_2 - \tfrac{5}{6}E \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) - 3D_1 + D_2 - E \geq 0\} \cup \{0\},\end{aligned}$$

ainsi $f \in \left(\frac{f_1^3}{f_2}\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_{-5} est un A_0 -module généré par (x_{-5})

si $m=-6$ alors

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}}(\mathcal{D}(-6))) = \{f \in \mathbb{C}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}) \mid \mathrm{div}(f) - 3D_1 + 2D_2 - E \geq 0\} \cup \{0\},$$

ainsi $f \in \left(\frac{f_1^3}{f_2^2}\right)\mathbb{C}[u,v]$ et A_{-6} est un A_0 -module généré par (x_{-6})

De plus ces A_0-modules vérifient les relations suivantes :

i) pour tout $i=-5,\dots,-1$, $A_i = A_{-i}\cdot A_{-6}$, ce qui donne $x_i = x_{-i}x_{-6}$.

ii) $A_1 = A_4 \cdot A_3 \cdot A_{-6}$, ce qui donne $x_1 = x_4x_3x_{-6}$.

iii) $A_4 = A_2 \cdot A_2$, ce qui donne $x_4 = x_2x_2$.

iv) $A_5 = A_2 \cdot A_3$, ce qui donne $x_5 = x_2x_3$.

v) On a aussi $u = x_{6,u}x_{-6}$ et $v = x_{6,v}x_{-6}$ ainsi que $(x_2)^3x_{-6} = f_2$ et $(x_3)^2x_{-6} = f_1$.

Or par hypothèse $f_2 = v$ et $f_1 = u$ ce qui donne $(x_3)^2 = x_{6,u}$ et $(x_2)^3 = x_{6,v}$.

Ainsi on obtient l'anneau gradué suivant :

$\mathbb{C}[x_{-6},x_2,x_3]$ ce qui correspond bien à $\mathbb{A}^3$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda\cdot(x_{-6},x_2,x_3) = (\lambda^{-6}x_{-6},\lambda^2x_2,\lambda^3x_3)$ et prouve que la présentation est la bonne.

Soit $H = \{h(u_1,\dots,u_n)=0\} \subset \mathbb{A}^n$ une hypersurface réduite et irréductible contenant l'origine comme point régulier, soit $\tilde{H}$ son transformé strict dans $\tilde{\mathbb{A}}^n$. Pour tout $p \geq 1$, on note :

$$\mathcal{D}_{H,p} = \left\{\frac{1}{p}\right\}\tilde{H} + [0,\frac{1}{p}]E,$$

où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement π, et on considère $X_{H,p} = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^n, \mathcal{D}_{H,p})$.

Proposition 1.4.10. *La variété $X_{H,p}$ est isomorphe de manière équivariante à la sous-variété lisse $Z(H,p)$ de $\mathbb{A}^n \times \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y,t])$ définie par l'équation :*

$$\{y^{-1}h(x_1y,...,x_ny) + t^p = 0\},$$

munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire $\lambda\cdot(x_1,...,x_n,y,t) = (\lambda^p x_1,...,\lambda^p x_n,\lambda^{-p}y,\lambda t)$ sur $\mathbb{A}^{n+2}$.

Démonstration. Le fait que $Z = Z(H,p)$ soit lisse se vérifie à l'aide du critère jacobien. On considère la graduation induite par l'action de $\mathbb{G}_m$, $Z = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n)$, alors $A_0 = \mathbb{C}[x_1y, \dots, x_ny]$ et $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_{pn}$ est engendré par A_0 et $A_{\pm p}$. Ainsi $Y(Z)$ est isomorphe à l'éclatement $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$ de $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_n])$ à l'origine. On applique alors la méthode décrite dans 1.3.2.2, avec la suite exacte :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "F"'] & \mathbb{Z}^{n+2} \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbb{Z}^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

où $F = {}^t(p, ..., p, -p, 1)$, $P = \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & \mathrm{I}_n & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p \end{pmatrix}$ avec I_n la matrice identité de taille $n \times n$ et $s = (0, ..., 0, 1)$.

On trouve que le p-diviseur pour Z est de la forme $\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{p}\right\} \tilde{H} + [0, \frac{1}{p}]E$. $\square$

Exemple 1.4.11. Si on considère $n = 2$ et $H = \{h(u_1, u_2) = u_1 = 0\}$ alors $X_{H,p} = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^n, \mathcal{D}_{H,p})$ correspond à $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, y, t])$ muni d'une action hyperbolique et linéaire de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x_1, y, t) = (\lambda^p x_1, \lambda^{-p} y, \lambda t)$

La présentation A-H des variétés $Z(H,p) \simeq X_{H,p}$ illustre leur construction en deux étapes. Elles sont obtenues par deux modifications qui vont donc être introduites dans les prochaines sections de manière détaillée. Premièrement une modification particulière appelée *modification hyperbolique* ([tD1]) qui à partir de H on construit une variété de dimension $\dim(H) + 1$ munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. On obtient ainsi $Z(H,1) \simeq X_{H,1}$ dont le quotient A-H est isomorphe à l'éclatement $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \to \mathbb{A}^n$ de $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_n])$ à l'origine. Deuxièmement, on effectue un *recouvrement cyclique* d'ordre p ([tD2]), pour obtenir $Z(H,p) \simeq X_{H,p} \to X_{H,1}$ qui est elle aussi munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par celle de $Z(H,1) \simeq X_{H,1}$. Ces deux procédés combinés permettent de générer un grand nombre de variétés avec action de $\mathbb{G}_m$.

Chapitre 2

Transformations affines et présentations A-H

2.1 Modifications affines

Dans un premier temps on va considérer certaines transformations birationnelles, dites *modifications affines*. Ces modifications vont permettre à partir d'une variété affine irréductible $X = \mathrm{Spec}(A)$ de construire une nouvelle variété $X' = \mathrm{Spec}(A')$ birationnelle à X. On s'intéressera particulièrement aux *modifications hyperboliques* : cas particulier des précédentes modifications. Elles ont la particularité de créer des variétés munies en plus d'une action du groupe $\mathbb{G}_m$. On va par la suite quand cela est possible décrire l'influence d'une modification affine sur la présentation Altmann-Hausen d'une $\mathbb{T}$-variété. On débutera par les modifications affines en commençant par une étude générale des hypothèses nécessaires et en évoquant les problèmes possibles qui peuvent apparaître pour avoir une équivalence entre une modification affine de la $\mathbb{T}$-variété et une modification affine de son quotient A-H. Puis dans le cas des actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ on donnera des conditions suffisantes sur les modifications affines des $\mathbb{G}_m$-variétés pour que la modification affine corresponde a une modification affine du quotient A-H . Cette partie est basée essentiellement sur les résultats de Kaliman et Zaidenberg ([Z, Ka-Z]) ainsi que sur l'article de tom Dieck [tD1]. On donnera cependant la définition de modification affine dans le cadre plus général des variétés quasi-projectives telle qu'elle apparait dans [Du].

2.1.1 Modifications affines, définition et exemples

2.1.1.1 Généralités sur les modifications affines

On rappelle la construction dans le cas des variétés quasi-projectives d'une modification affine d'après [Du], qui coïncide dans le cas affine avec la définition donnée dans [Ka-Z].

Définition 2.1.1. [E, 5.2] Soit X une variété et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé d'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ alors $\mathrm{Proj}_X(\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathcal{I}^n t^n))\ \mathcal{O}_X$, correspond à l'éclatement de X le long du sous-schéma Z défini par l'idéal $\mathcal{I}$.

Définition 2.1.2. Soit X un schéma, un morphisme $\pi : Y \to X$ est *affine* sur X si il existe un recouvrement (X_i) de X par des ouverts affines, tel que pour tout i, $\pi^{-1}(X_i)$ est un ouvert affine de Y.

Définition 2.1.3. [Du, 2.9] Soit $(X, \mathcal{I}, D)$ un triplet constitué d'un schéma X, d'un diviseur de Cartier effectif D sur X et d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ contenant l'idéal $\mathcal{O}_X(-D)$, alors *la modification affine* de X de centre $(\mathcal{I}, D)$ est le X-schéma affine :

$$\sigma_{\mathcal{I},D} : X_{\mathcal{I},D} = \mathrm{Spec}\left((\bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X(D))^n t^n)/(1-t) \right) \to X.$$

Dans le cas d'une variété affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ et d'un diviseur D sur X principal, cette notion coïncide avec celle donnée dans [Ka-Z]. Une modification affine d'une variété affine $\pi_{I,f} : X_{I,f} \to X$ correspond à une sous-algèbre de type fini A' de $\mathrm{Frac}(A)$, le corps des fractions de A. Plus précisément A' est de la forme $A[It]/(1-ft)$ avec $I \subset A$ un idéal et $f \in I$ un élément non nul, c'est pourquoi on introduit la notation suivante $A' = A[I/f]$.

Géométriquement, on a une immersion canonique $i : X_{I,f} \hookrightarrow \tilde{X} = \mathrm{Proj}(A[It])$ qui réalise $X_{I,f}$ en tant que l'ouvert principal de $\tilde{X}$ où f ne s'annule pas. Ce qui donne d'après la proposition précédente que $\pi_{I,f}$ se factorise, via l'immersion i, par l'éclatement de X le long du sous-schéma Z d'idéal I. Ainsi $X_{I,f}$ s'identifie via l'immersion i, au complémentaire dans $\tilde{X}$ du sous-schéma fermé $D_f^{pr} \simeq \mathrm{Proj}(A[It]/(ft))$ que l'on appellera le *transformé propre* de $D = \mathrm{div}(f)$.

Exemple 2.1.4.

i) La modification affine de $\mathbb{A}^{n+1} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}])$ de centre (I, f), où $I = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ et $f = x_{n+1}$, donne :

$$X_{I,f} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1}, x_{n+1}]) \simeq \mathbb{A}^n.$$

$X_{I,f}$ s'identifie donc de manière naturelle à une carte de l'éclatement de $\mathbb{A}^n$ à l'origine.

ii) La modification affine de $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2])$ de centre (I, f), où $I = (x_1, f)$, donne la surface :

$$S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2, y]/(x_1 - yf(x_1, x_2))).$$

Il est connu ([Har, Théorème 7.17]) que tout morphisme birationnel projectif $\pi : X' \to X$ entre variétés quasi-projectives est isomorphe à l'éclatement de X le long d'un sous-schéma.

Il existe un énoncé analogue dans le cas des variétés affines :

Proposition 2.1.5. *[Ka-Z, Du]Tout morphisme birationnel affine entre variétés quasi-projectives est une modification affine.*

Démonstration. On va montrer uniquement le cas où X est affine. Soit $\pi : X' \to X$ un tel morphisme, comme f est birationnel, il existe un isomorphisme $\pi^\sharp : \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[X]) \to \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[X'])$ entre le corps des fonctions rationnelles de X et celui de X'.

Posons $A = (\pi^\sharp)^{-1}(\mathbb{C}[X'])$, alors :

$$\mathbb{C}[X] \subset A \subset \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[X]),$$

de plus A est finiment engendré $A = \mathbb{C}[X][\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_k}{b_k}]$ donc en posant $f = b_1 \dots b_k$, $\frac{a_i}{b_i} = \frac{c_i}{f}$ pour tout $i = 1, \dots, k$ et $I = (c_1, \dots, c_k, f)$ on obtient

$$A = \mathbb{C}[X][\frac{c_1}{f}, \dots, \frac{c_k}{f}] = \mathbb{C}[X][I/f].$$

□

2.1.1.2 Modifications hyperboliques

Définition 2.1.6. Soit X une variété. On appelle *modification hyperbolique* de X de centre $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, la modification affine de $X \times \mathbb{A}^1$ avec I l'idéal de $Z \times \{0\}$, et pour diviseur $X \times \{0\}$.

La particularité des modifications hyperboliques dans le cas des variétés affines est la suivante :

Proposition 2.1.7. *La modification hyperbolique X' d'une variété affine X de centre un point $p \in X$ est munie naturellement d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$, de plus, on a $X'//\mathbb{G}_m \simeq X$*

Démonstration. La démonstration découle de la remarque suivante, si on considère la modification affine de $\mathbb{A}^{n+1} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}])$ de centre (I, f) où $I = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ et $f = x_{n+1}$, on obtient :

$$(\mathbb{A}^{n+1})_{(I,f)} = \mathrm{Spec}([\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, x_{n+1}]) \simeq \mathrm{Spec}([u_1, \dots, u_n, y]) = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Si on suppose que $\mathbb{A}^{n+1}$ était muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ donnée comme suit,

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, \lambda^{-1} x_{n+1}),$$

alors $(\mathbb{A}^{n+1})_{(I,f)}$ possède une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite donnée par

$$\lambda \cdot (\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, x_{n+1}) = (\lambda \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \lambda \frac{x_n}{x_{n+1}}, \lambda^{-1} x_{n+1}).$$

Considérons maintenant une variété affine X,

$$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(h_1, \dots, h_k)),$$

où $h_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ pour $m = 1, \dots, k$. Après une translation dans $\mathbb{A}^n$, on peut toujours supposer que la modification hyperbolique de X au point p correspond a la modification hyperbolique de X à l'origine de $\mathbb{A}^n$. Ainsi ;

$$\{0, \dots, 0\} \times \{0\} \in X \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{A}^{n+1},$$

et la modification hyperbolique de X au point p correspond à la restriction de la modification affine de $\mathbb{A}^{n+1}$ à la sous-variété $X \times \mathbb{A}^1$([Z, Lemme 4.6]).

Ainsi la pré-image totale de $X \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^{n+1}$ est l'union du diviseur exceptionnel $E = \{x_{n+1} = 0\}$ et de la sous variété H, où H est définie par l'intersection des sous-variétés :

$$H_m = \left\{ \frac{h_m(\frac{x_1}{x_{n+1}} x_{n+1}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}} x_{n+1})}{(x_{n+1})^{\alpha_m}} = 0 \right\} \in \mathbb{A}^{n+1},$$

où α_m désigne la multiplicité de l'hypersurface $\{h_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ à l'origine. Donc H correspond au transformé propre de $X \times \mathbb{A}^1$.

Ceci donne après réécriture des équations dans un système de coordonnées adapté que la modification hyperbolique de X au point p est donnée par

$$X' = \operatorname{Spec} \left(\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n, y] / \left(\frac{h_1(u_1 y, \ldots, u_n y)}{y^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{h_k(u_1 y, \ldots, u_n y)}{y^{\alpha_k}} \right) \right).$$

De plus X' est stable pour l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$induite par l'action linéaire sur $(\mathbb{A}^{n+1})_{(I,f)}$ suivante $\lambda \cdot (u_1, \ldots, u_n, y) = (\lambda u_1 \ldots, \lambda u_n, \lambda^{-1} y)$.

On remarque de plus que

$$\mathbb{A}^{n+1} /\!/ \mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n, y]^{\mathbb{G}_m}) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[yu_1, \ldots, yu_n]) \simeq \mathbb{A}^n,$$

ce qui pour Y' correspond à :

$$X' /\!/ \mathbb{G}_m \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[yx_1, \ldots, yx_n]) / (h(yx_1, \ldots, yx_n)) \simeq X.$$

□

Dans le cas d'une hypersurface de $X = \{h(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ contenant l'origine comme point régulier, on retrouve la modification hyperbolique au sens de [Z]. La modification hyperbolique de X à l'origine est alors en notant $q(x_1, \ldots, x_n, y) = h(yx_1, \ldots, yx_n)/y \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y]$:

$$X' = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n, y] / (q(x_1, \ldots, x_n, y)))$$

Le fait que X contienne l'origine de $\mathbb{A}^n$ assure que $h(yx_1, \ldots, yx_n)$ est divisible par y et le fait que h soit régulier à l'origine assure que q est irréductible. De plus à l'aide du critère Jacobien on obtient que X' est lisse si et seulement si X l'est aussi.

Exemple 2.1.8. On considère la courbe cuspidale excentrée lisse à l'origine

$$X = \{h(x,z) = (x-1)^2 + (z-1)^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z])$$

la modification hyperbolique de X à l'origine est alors :

$$X' = \{((xy-1)^2 + (zy-1)^3)/y = 0\} \subset \mathbb{A}^3.$$

Après réécriture :

$$X' = \{x^2y - 2x + z^3y^2 - 3z^2y + 3z = 0\} \subset \mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z]).$$

De plus si l'on considère l'action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^{n+1}$ induite par la modification hyperbolique de X donnée par $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n, y) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \lambda^{-1} y)$ alors X' est quasi-invariant de poids 1 pour cette action.

$$\mathbb{A}^{n+1} /\!/ \mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}^n$$

ce qui pour X' donne :

$$X' /\!/ \mathbb{G}_m \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[yx_1, \dots, yx_n])/(h(yx_1, \dots, yx_n)) \simeq X.$$

2.1.1.3 Modifications affines équivariantes

Si l'on part d'une variété affine X munie d'une action de groupe algébrique G et que de plus l'idéal I et la fonction régulière f sont stables par G alors la nouvelle variété X' est munie d'une action de G.

Proposition 2.1.9. *Soient une G-variété X , un sous-schéma fermé G-invariant $Z \subset X$, d'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ et un diviseur de Cartier G-invariant et effectif* D *contenant Z.*

Alors la modification affine $X_{\mathcal{J},\mathrm{D}}$ est munie d'une G-action.

Démonstration. Soit $\mu : G \times X \to X$ l'action de G sur X, comme $\mathcal{I}$ est G -invariant on a $\mu^{-1}(\mathcal{J}) = G \times \mathcal{J}$. On applique la propriété universelle de l'éclatement [Har, Corollaire 7.15] ainsi il existe un unique morphisme $\tilde{\mu} : G \times Bl_{\mathcal{J}}(X) \to Bl_{\mathcal{J}}(X))$ qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times Bl_{\mathcal{J}}(X) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & Bl_{\mathcal{J}}(X) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}.$$

De plus pour tout $x \in Bl_{\mathcal{J}}(X) \setminus E$, $\tilde{\mu}$ satisfait les $\tilde{\mu}(e,x) = x$ et $\tilde{\mu}(g_1g_2, x) = \tilde{\mu}(g_1, \tilde{\mu}(g_2, x))$ $\tilde{\mu}$ s'étend alors de manière unique pour tout $x \in Bl_{\mathcal{J}}(X)$ et ainsi $Bl_{\mathcal{J}}(X)$ est une G-variété.

D est un diviseur de Cartier G -invariant sur X donc son transformé propre D' est un diviseur G-invariant sur $Bl_{\mathcal{J}}(X)$ ainsi $X_{\mathcal{J},\mathrm{D}} = Bl_{\mathcal{J}}(X) \setminus \mathrm{D}'$ est une G-variété. □

La présentation Altmann-Hausen est valable uniquement pour des $\mathbb{T}$-variétés normales, or la modification affine d'une variété normale n'est pas nécessairement normale. Cependant la normalisation d'une G-variété est elle aussi munie d'une G-action (voir 1.1.28).

La normalisation est un morphisme affine birationnel ainsi la composition des deux applications équivariantes que sont la modification affine $X_{\mathcal{J},\mathrm{D}}$ suivie de la normalisation $\hat{X}_{\mathcal{J},\mathrm{D}}$ donne encore une modification affine équivariante. On peut donc supposer que $X_{\mathcal{J},\mathrm{D}}$ est une G-variété normale, sous les hypothèses de la proposition 2.1.9.

Exemple 2.1.10. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z,t])$ muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x,z,t) \to (\lambda^6 x, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$. Soit $I = (f,g)$ où $f = x^2 + z^4$ et $g = x + z^2 + t^3$. Alors la modification affine de $\mathbb{A}^3$ le long du diviseur D_f avec pour centre l'idéal I donne la variété :

$$X' = \{(x^2+z^4)y - x + z^2 + t^3\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t]),$$

qui est elle aussi munie d'une $\mathbb{G}_m$-action induite par une action sur $\mathbb{A}^4$ donné par $\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^6 x, \lambda^{-6} y, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$.

Le choix du poids des polynômes qui engendrent I est important : dans l'exemple précédent on a obtenu une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ sur X'. Ceci vient du fait que le poids de f pour l'action de départ sur $\mathbb{A}^3$ était supérieur à celui de g.

2.1.2 Modifications affines et présentation A-H

On détermine un cadre dans lequel on va pouvoir mettre en lumière les relations entre d'une part certaines modifications affines d'une $\mathbb{T}$-variété X et d'autre part certaines modifications affines de son quotient A-H que l'on note Y. Il est clair que les modifications affines de X devront au minimum être équivariantes pour l'action du tore. Puisque le quotient A-H d'une $\mathbb{T}$-variété est semi-projectif, donc quasi projectif d'après [EGA, Théorème 5.5.3], la notion de modification affine peut être considérée dans ce cadre.

2.1.2.1 Modifications affines du quotient A-H

Théorème 2.1.11. *Soit $X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ une $\mathbb{T}$-variété et $\pi : Y' \to Y$ une modification affine de Y. Alors $\mathbb{S}(Y', \pi^*(\mathcal{D}))$ est isomorphe à un ouvert $\mathbb{T}$-invariant de X.*

La preuve de ce théorème peut se décomposer en deux parties, chacunes conséquences directes de la construction en deux étapes d'une modification affine. Soit $\sigma_{\mathcal{I},D} : Y_{\mathcal{I},D} = \mathrm{Spec}\,((\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathcal{I}\otimes\mathcal{O}_Y(D))^n t^n)/(1-t)) \to Y$ la modification affine de centre $(\mathcal{I}, D)$ de la variété normale et semi-projective Y (voir définition 2.1.3), alors on peut décomposer $\sigma_{\mathcal{I},D}$ en deux étapes.

On note $\pi : \tilde{Y} \to Y$ l'éclatement de Y le long du sous-schéma fermé $Z \subset Y$ d'idéal $\mathcal{I}$. Le résultat [A-H, corollaire 8.12] admet comme conséquence directe :

Proposition 2.1.12. *Soit $\mathcal{D}$ un p-diviseur sur une variété semi-projective Y. Alors pour tout morphisme projectif birationnel $\pi : \tilde{Y} \to Y$ la variété $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \pi^*(\mathcal{D}))$.*

Démonstration. On a

$$\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}) = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{u\in\sigma^\vee\cap M}\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u))))$$

et

$$\mathbb{S}(\tilde{Y}, \pi^*(\mathcal{D})) == \mathrm{Spec}(\bigoplus_{u\in\sigma^\vee\cap M}\Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\pi^*(\mathcal{D})(u)))).$$

Ainsi il suffit de montrer que pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$ on a $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u))) \simeq \Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\pi^*(\mathcal{D})(u)))$. On considère un entier k positif tel que $k\mathcal{D}(u)$ est un diviseur de Cartier à coefficients entiers pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$. On a alors :

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u))) = \{f \in \mathbb{C}(Y) \mid f^k \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(k\mathcal{D}(u)))\}.$$

Or Y est une variété normale et π est un morphisme projectif ainsi par le Théorème principal de Zariski $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}} = \mathcal{O}_Y$ et par la formule de projection ([Har, p.124]) on a : $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(u))) \simeq \{f \in \mathbb{C}(Y) \mid f \in \Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\pi^*(k\mathcal{D})(u)))\} = \Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\pi^*(\mathcal{D})(u)))$

□

On considère le transformé strict D' de D par π, ainsi $Y_{\mathcal{I},D}$ s'identifie au complémentaire de D' dans $\tilde{Y}$ ce qui se traduit par une immersion ouverte i : $Y_{\mathcal{I},D} \simeq \tilde{Y} \setminus D' \hookrightarrow \tilde{Y}$.

Proposition 2.1.13. *Soit X une $\mathbb{T}$-variété isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ et soit D un diviseur de Cartier sur Y n'étant pas contenu dans le support de $\mathcal{D}$, alors en notant $i : Y' = Y \setminus \mathrm{supp}(D) \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte naturelle on a les résultats suivants :*

1) $i^*(\mathcal{D})$ est un p-diviseur sur Y'

2) i induit une immersion ouverte $j : X' = \mathbb{S}(Y', i^*(\mathcal{D})) \hookrightarrow X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$.

Démonstration. 1) $\mathcal{D} = \sum \Delta_k \otimes D_k$ est un p-diviseur sur Y et i est un morphisme affine. Ainsi $i^*(\mathcal{D}) = \sum \Delta_k \otimes i^*(D_k)$ satisfait :

i) Pour tout k, $i^*(D_k)$ est un diviseur effectif et pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$ $i^*(\mathcal{D})(u)$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier sur Y'.

ii) Pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$, $i^*(\mathcal{D})(u)$ est semi-ample.

iii) Pour tout $u \in \mathrm{relint}(\sigma^\vee) \cap M$, $\mathcal{D}(u)$ $i^*(\mathcal{D})(u)$ est abondant.

Ainsi $i^*(\mathcal{D})$ est un p-diviseur sur Y'.

2) Soit $u \in \sigma^\vee \cap M$ et $g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(\mathcal{D}(u)))$, c'est-à-dire, $g \in \mathbb{C}(Y)$ et $div(g) + \mathcal{D}(u) \geq 0$. Puisque $Y' = Y \setminus D$ on a $\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(Y')$ et les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcccc} g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(\mathcal{D}(u))) & \Leftrightarrow & g \in \mathbb{C}(Y') & et & div(g) + \mathcal{D}(u) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & g \in \mathbb{C}(Y') & et & i^*(div(g) + \mathcal{D}(u)) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & g \in \mathbb{C}(Y') & et & div(g)_{|Y'} + \mathcal{D}_{|Y'}(u) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & g \in \Gamma(Y', \mathcal{O}(\mathcal{D}_{|Y'}(u))). & & \end{array}$$

Ceci valant pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$ on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \subset \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$, l'inclusion respectant la graduation donnée par l'action de $\mathbb{T}$. □

Ce qui donne, dans le cas de la modification affine que l'on considère $\sigma_{\mathcal{I},D}$, si D' n'est pas dans le support de $\pi^*(\mathcal{D})$ ce qui revient à demander que D ne soit pas dans le support de $\mathcal{D}$, on obtient :

$$j : \mathbb{S}(Y_{\mathcal{I},D}, i^*(\pi^*(\mathcal{D}))) \hookrightarrow \mathbb{S}(\tilde{Y}, \pi^*(\mathcal{D})) \simeq \mathbb{S}(Y, \mathcal{D}).$$

Donc il existe une modification affine équivariante de centre $(\mathcal{J}, \mathrm{D})$ tel que l'on a $\sigma_{\mathcal{J},\mathrm{D}} : \mathbb{S}(Y_{\mathcal{I},D}, i^*(\pi^*(\mathcal{D}))) \to \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$.

2.1.2.2 Modifications affines équivariantes d'une $\mathbb{T}$-variété

2.1.2.2.1 Discussion sur le cas général

Dans le cadre général on considère la G-variété X et la modification affine de centre $(\mathcal{J}, \mathrm{D})$ de X, $\sigma_{\mathcal{J},\mathrm{D}} : X_{\mathcal{J},\mathrm{D}} \to X$. On cherche des conditions pour que la modification affine soit tout d'abord G-équivariante.

Dans le cas d'une $\mathbb{T}$-variété $X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ on voudrait déterminer les modifications affines correspondantes à des modifications affines de Y. On veut donc que l'application entre p-divieurs soit donnée par un triplet $(\sigma_{\mathcal{I},D}, \mathrm{id}, 1)$ où $\sigma_{\mathcal{I},D} : Y_{\mathcal{I},D} \to Y$ est la modification affine de centre $(\mathcal{I}, D)$ de la variété Y. Un premier élément de réponse est que cette modification affine équivariante ne doit pas modifier le type d'action (hyperbolique, elliptique, etc) ceci dans le but de ne pas modifier le cône de récession σ qui est utilisé pour la décomposition de $\mathcal{D}$ (définition 1.2.22).

En particulier la modification affine de $\mathbb{A}^3$ donnée dans l'exemple 2.1.10 change le type d'action . En effet l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z,t])$ est donné par $\lambda \cdot (x,z,t) \to (\lambda^6 x, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$ cette action n'est donc pas hyperbolique et dans ce cas $\sigma = [0, \infty[$. A contrario l'action sur l'hypersurface,

$$X' = \{(x^2+z^4)y - x + z^2 + t^3\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t]),$$

qui est induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donné par $\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^6 x, \lambda^{-6} y, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$ est une action hyperbolique puisque $\lambda \cdot y = \lambda^{-6} y$ et donc $\sigma = \{0\}$.

Même dans le cas où l'action est préservé, une modification affine équivariante d'une $\mathbb{T}$-variété ne correspond pas nécessairement à une modification affine du quotient A-H :

Exemple 2.1.14. On considère $X = \mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$ muni d'une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x,y,z) \to (\lambda^3 x, \lambda^2 y, \lambda z)$. On effectue une modification affine de centre (I,f) où $I = (X,Y)$ et $f = Y$ alors

$$X_{I,f} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x/y, y, z]) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x', y, z]) \simeq \mathbb{A}^3.$$

$X_{I,f}$ est alors munie d'une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ donnée par
$\lambda \cdot (x', y, z) \to (\lambda x', \lambda^2 y, \lambda z)$. Cependant le quotient A-H de X est donné par $\mathbb{P}(3,2,1)$ et celui de $X_{I,f}$ par $\mathbb{P}(1,2,1)$ et il n'existe pas de modification affine de $\mathbb{P}(3,2,1)$ donnant $\mathbb{P}(1,2,1)$, en effet une variété obtenue par modification affine n'est pas une variété compacte.

2.1.2.2.2 Le cas des actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur des variétés lisses

Dans le cas particulier des actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur des variétés lisses X on connait exactement Y à l'aide du Théorème 1.4.5, il existe un idéal I dans $Y_0 \simeq X//\mathbb{G}_m$ tel que $Y \simeq Bl_I(Y_0)$. Ainsi si on a les hypothèses de la proposition 1.1 on obtient alors le diagramme suivant en utilisant la propriété universelle du quotient et celle de l'éclatement :

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathcal{J},\mathrm{D}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y_0' \simeq X_{\mathcal{J},\mathrm{D}}//\mathbb{G}_m \arrow[r] & Y_0 \simeq X//\mathbb{G}_m.
\end{tikzcd}$$

Et Y_0' est bien une modification affine de Y_0. Si de plus on suppose que l'éclatement nécessaire à la construction de Y commute avec cette modification affine on obtient alors :

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathcal{J},\mathrm{D}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y_0' \simeq X_{\mathcal{J},\mathrm{D}}//\mathbb{G}_m \arrow[r] & Y_0 \simeq X//\mathbb{G}_m \\
Y_{\mathcal{I},D} \simeq Bl_J(Y_0') \arrow[r] \arrow[u] & Y \simeq Bl_I(Y_0) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Exemple 2.1.15. On considère $\mathbb{A}^3$ muni de l'action hyperbolique linéaire donnée par $\lambda \cdot (x, y, z) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda z)$ et la modification affine de celui-ci le long du diviseur $\{x^2 y + x = 0\}$ avec centre $I = (x^2 y + x, 1 + zy)$. Ainsi on obtient

$$X' \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]/((1 + zy)t - x^2 y + x)),$$

qui est une variété lisse munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ suivante : $\lambda \cdot (x, y, z, t) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda z, \lambda t)$.

D'une part $\mathbb{A}^3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2, \mathcal{D})$ avec $\mathcal{D} = [-1, 0]E$ où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

D'autre part X' est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{S}, \mathcal{D})$ avec :

$$S \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[u, v, w]/(w + uw + v + v^2),$$

et $\mathcal{D} = [-1, 0]E$ où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

De plus S est bien la modification affine de $\mathbb{A}^2$ le long du diviseur $\{v + v^2 = 0\}$ et de centre $(v^2 + v, 1 + u)$.

Proposition 2.1.16. *Soit Y une variété affine normale et $\pi_p : \tilde{Y}_p \to Y$ l'éclatement d'un point lisse de Y alors $\mathbb{S}(\tilde{Y}_p, [-1, 0]E)$ est isomorphe de manière équivariante à la modification hyperbolique de Y au point p.*

Démonstration. On considère un plongement de Y dans $\mathbb{A}^n$ tel que l'on a :

$$Y = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(h_1, \ldots, h_k)),$$

où $h_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ pour $m = 1, \ldots, k$. Après une translation dans $\mathbb{A}^n$, on peut toujours supposer que la modification hyperbolique de Y au point p correspond a la modification hyperbolique de Y à l'origine de $\mathbb{A}^n$.

Alors la modification hyperbolique de Y est donnée par :

$$Y' = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n, y]/\left(\frac{h_1(u_1 y, \ldots, u_n y)}{y^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{h_k(u_1 y, \ldots, u_n y)}{y^{\alpha_k}}\right)\right).$$

De plus Y' est stable pour l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^{n+1}$ suivante $\lambda \cdot (u_1, \ldots, u_n, y) = (\lambda u_1 \ldots, \lambda u_n, \lambda^{-1} y)$.

Ainsi d'après la proposition 2.1.7 et en considérant la construction donnée en §1.3.2.2 (appliqué dans un cas similaire pour la proposition 1.4.10), on obtient le résultat. $\square$

2.2 Recouvrements cycliques

De manière analogue à la section précédente, on va étudier le lien entre *recouvrements multicycliques* d'une $\mathbb{T}$-variété X et la présentation Altmann-Hausen de celle ci. On commencera par donner la définition de recouvrement cyclique dans le cadre général (voire [Es-V]), puis on se focalisera sur le cas des variétés affines. Plus précisément on va étudier les $\mathbb{T}$-variétés X qui sont de plus munies d'une action d'un groupe abélien fini G commutant avec l'action du tore et on donnera le lien entre la présentation en termes de p-diviseurs de la variété X et celle de son quotient $X' = X//G$.

2.2.1 Recouvrements cycliques, définition et exemples

Soient X une variété algébrique pas nécessairement affine, $D = \sum \alpha_k \cdot D_k$ un diviseur de Cartier effectif sur X et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible tel que l'on a $\mathcal{L}^n = \mathcal{O}_X(D)$ pour un entier naturel positif n.

On considère une section $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^n)$, $s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}^n$ tel que le diviseur des zéros de s est exactement D. Alors son dual $s^\vee : \mathcal{L}^{-n} \to \mathcal{O}_X$ permet de munir le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{A}'$ défini comme suit :

$$\mathcal{A}' = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-i} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\left\lfloor \frac{i}{n} D \right\rfloor),$$

de la multiplication donnée par

$$\left(\mathcal{L}^{-i} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\left\lfloor \frac{i}{n} D \right\rfloor)\right) \otimes \left(\mathcal{L}^{-j} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\left\lfloor \frac{j}{n} D \right\rfloor)\right) \simeq \mathcal{L}^{-i-j} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\left\lfloor \frac{i+j}{n} D \right\rfloor),$$

qui est de plus isomorphe a $\mathcal{L}^{-i-j+n} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\left\lfloor \frac{i+j-n}{n} D \right\rfloor)$ si $i + j \geq n$.

Définition 2.2.1. [Es-V] De la construction précédente on obtient $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi} X$ qui est appelé *le recouvrement cyclique* de X d'ordre n le long de D.

Cette construction se traduit localement, c'est-à-dire, en considérant une variété affine et un diviseur D principal par ceci :

Définition 2.2.2. Soit X une variété affine :

i) Soit q un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ pour tout entier $k > 0$ on considère la sous variété de $X \times \mathbb{A}^1$,

$$X_k = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X][y]/(q(x) - y^k)\}.$$

Alors $\varphi_k : X_k \to X$ est appelé le recouvrement cyclique de X d'ordre k le long du diviseur $D = \{q(x) = 0\}$.

ii) On peut de même considérer une suite de polynôme q_i dans $\mathcal{O}(X)$, pour $i = 1, \ldots, l$ et une suite d'entiers $k_1, \ldots, k_l$ positifs. Alors la variété

$$Y = \{u_i^{k_i} = q_i(x), i = 1, \ldots, k\} \subset X \times \mathbb{A}^l = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X][u_1, \ldots, u_l]),$$

est appelé le recouvrement multicyclique de X d'ordre k_i le long du diviseur $\{q_i(x) = 0\}$.

Exemple 2.2.3.

i) Le recouvrement cyclique de l'espace affine $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ d'ordre k le long d'un hyperplan $\{x_i = 0\}$ est encore un espace affine :

$$\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^k, x_{i+1}, \ldots, x_k]).$$

ii) On considère $X = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$, le polynôme $q(x, y) = x + x^2y$ et l'entier $n = 2$ alors :

$$X_2 = \{x + x^2y + z^2 = 0\} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]),$$

est donc le recouvrement de $\mathbb{A}^2$ d'ordre 2 le long du diviseur $\{x + x^2y\} = 0$

iii) On considère $X = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$, les polynômes $q_1(x, y) = x + x^2y$ et $q_2(x, y) = y$ ainsi que les entiers $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$ alors :

$$Y = \{x + x^2y^3 + z^2 = 0\} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]),$$

est donc le recouvrement bicyclique de $\mathbb{A}^2$ d'ordre 2 le long du diviseur $\{x + x^2y = 0\}$ et d'ordre 3 le long du diviseur $\{y = 0\}$.

On remarque que les recouvrements cycliques peuvent être effectués dans un ordre quelconque a condition que les diviseurs soient tous définis sur la variété de départ X. De plus en notant μ_k pour désigner le groupe des racines k-ème de l'unité, on remarque qu'en effectuant un recouvrement cyclique d'ordre k le long d'un diviseur on créé une variété $X_k = \{(x, y) \in X \times \mathbb{A}^1 / q(x) = y^k\}$ munie d'une action de groupe μ_k donné par $\epsilon \cdot (x, y) \to (x, \epsilon y)$. Il en va de même avec les recouvrement multicycliques.

2.2.2 Groupes cycliques et présentation A-H

Le but de cette section est d'étudier le cas des $\mathbb{T}$-variétés X qui sont de plus munies d'une action d'un groupe abélien fini G commutant avec l'action du tore. Étant convenu d'après le Théorème 1.3.4 que X admet une écriture sous la forme $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ de la même manière la variété $X' = X//G$ est elle aussi une $\mathbb{T}'$-variété et admet donc une présentation sous la forme $\mathbb{S}(Y', \mathcal{D}')$. Dans ces conditions $\mathbb{T}'$ est isomorphe à $\mathbb{T}$ et il est obtenu comme quotient de $\mathbb{T}$ par un groupe fini. Bien que le couple $(Y, \mathcal{D})$ ne soit pas unique on va montrer, qu'il existe un choix adapté à notre cas. Ce choix correspond à une variété Y munie d'une action de G et d'un p-diviseur $\mathcal{D}_G$ sur Y qui est *G-invariant*. On va pouvoir ainsi construire la présentation de X' en fonction de ce couple. L'application de ce résultat permet de calculer la présentation de certaines variétés quotients.

On considère une variété X munie d'une action de $G \times \mathbb{T}$ alors $X//G$ est munie d'une action de $\mathbb{T}$ qui n'est pas nécessairement effective. On pose alors $H_{\mathbb{T}}$ le sous-groupe de $\mathbb{T}$ constitué des éléments agissant trivialement sur $X//G$, la variété $X//G$ est alors munie d'une action effective de $\mathbb{T}' = \mathbb{T}/H_{\mathbb{T}}$. On obtient la caractérisation suivante :

Théorème 2.2.4. *Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ une $\mathbb{T}$-variété et soit G un groupe fini agissant sur X tel que les deux actions commutent. Alors on a les résultats suivants :*

1) Il existe une variété semi-projective Y munie d'une action de G et un p-diviseur G-invariant $\mathcal{D}_G$ sur Y tel que X soit isomorphe de manière $\mathbb{T} \times G$ équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}_G)$.

2) Il existe un p-diviseur $\mathcal{D}'$ sur $Y//G$ tel que $X//G$ soit isomorphe de manière équivariante à la $\mathbb{T}'$-variété $\mathbb{S}(Y//G, \mathcal{D}')$. De plus en notant $F : M^\vee \to M'^\vee$ l'application linéaire induite par l'inclusion du réseau des caractères M' de $\mathbb{T}'$ dans celui M de $\mathbb{T}$, $\mathcal{D}'$ peut être choisi tel que $F_*(\mathcal{D}_G) = \varphi_G^*(\mathcal{D}')$, où $\varphi_G : Y \to Y//G$ est le morphisme quotient.

Le diviseur $\mathcal{D}'$ dans le théorème précédent peut être choisi égal à $\frac{1}{\deg(\varphi_G)}(\varphi_G)_*(\mathcal{D}_G)$ vu comme un p-diviseur dans le réseau $M'^\vee$, où $(\varphi_G)_*(\mathcal{D}_G)$ est défini de manière analogue à l'image inverse d'un p-diviseur (voir §1.3.9). En général $\deg(\varphi_G)$ est différent du cardinal de G en particulier si l'action est triviale.

2.2.2.1 Descente des actions de groupes au quotient A-H et diviseur G-invariants.

Dans un premier temps on va montrer que si G un groupe abélien fini agit sur une $\mathbb{T}$-variétés $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ tel que les deux actions commutent alors la construction donnée en §1.3.2.1 donne une variété Y munie d'une action de G. On notera par $n : \widehat{Y} \to Y$ la normalisation de Y.

Proposition 2.2.5. *Soit X une $\mathbb{T}$-variété munie de plus d'une action d'un groupe fini G tel que les deux actions commutent. Alors il existe une variété semi-projective Y et un p-diviseur $\mathcal{D}$ sur Y tel que X soit isomorphe de manière $G \times \mathbb{T}$ équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ et que l'action de G sur $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ induise une action de G sur Y.*

Démonstration. La construction de Y donnée en 1.3.2.1 est celle qui correspond à l'énoncé. En effet puisque les actions de G et $\mathbb{T}$ commutent, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tout $u \in relint(\lambda)$ l'ouvert de point semi-stable

$$X^{ss}(u) := \{x \in X \,/\, \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \, and \, f \in A_{nu} \;\mid\; f(x) \neq 0\},$$

est stable par G en effet si $f \in A_{nu}$ alors $\lambda \cdot f \in A_{nu}$. Ainsi $W := \cap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ est de même stable par G, on rappelle que $W_\lambda = X^{ss}(u)$ pour n'importe quelle $u \in relint(\lambda)$. De plus le quotient par $\mathbb{T}$ de W que l'on a noté $q' : W \to Z$ commute avec l'action de G et cela induit une action du groupe fini sur l'image de W par q'. La clôture $\overline{q'(W)}$ est de même stable par G et comme de plus $\overline{q'(W)}$ est quasi-projective on obtient par la proposition 1.1.28 que l'action de G sur $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ induit une action de G sur Y. □

Maintenant que sous les bonnes hypothèses G agit sur Y, il est naturel de considérer l'action de G sur les diviseurs de Y.

Définition 2.2.6. Soit Y une variété semi-projective munie d'une action $\psi : G \times Y \to Y$ d'un groupe algébrique G et soit D un diviseur de Weil sur Y. Alors D est dit *G-invariant* si pour tout $g \in G$ on a $\psi(g, \cdot)^* D = D$. Cette notion se généralise aux p-diviseurs sur Y, soit $\mathcal{D}_G$ un p-diviseur sur Y, alors $\mathcal{D}_G$ est dit G-invariant si pour tout $g \in G$ on a $\psi(g, \cdot)^* \mathcal{D}_G = \mathcal{D}_G$.

Le lemme suivant établit l'existence de tel p-diviseurs et montre que pour une variété X munie d'une action de $G \times \mathbb{T}$ on peut toujours trouver un p-diviseur G-invariant $\mathcal{D}_G$ tel que X soit isomorphe de manière $G \times \mathbb{T}$ équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}_G)$.

Lemme 2.2.7. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une $\mathbb{T}$-variété et G un groupe fini agissant sur X tel que les deux actions commutent. Alors il existe un p-diviseur G-invariant $\mathcal{D}_G$ défini sur Y tel que X soit isomorphe de manière $G \times \mathbb{T}$ équivariante à $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D}_G)$.*

Démonstration. On a montré précédemment que l'action de G sur $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ induit une action de G sur Y. De plus dans §1.3.2.2, on a explicité le fait que un p-diviseur sur Y correspondant à X est totalement déterminé par le choix d'un homomorphisme $h : M \to \mathrm{Frac}(A)$ tel que pour tout $u \in M$, $h(u)$ est semi-invariant de poids u. Or, par définition l'homomorphisme h est donné par $h(u) = \frac{f}{g}$ avec f et g deux fonctions non nulles semi-invariantes de poids respectifs u_1 et u_2 tel que $u_1 - u_2 = u$, ceci garantissant que $h(u)$ est semi-invariant de poids u. On a de plus par hypothèse le fait que chaque partie A_u de notre anneau gradué A est stable par G ceci vient du fait que les actions de G et $\mathbb{T}$ commutent et donc que l'action de G ne doit pas changer la graduation induite par l'action de $\mathbb{T}$. Ceci valant pour tout $u \in M$, on peut choisir $f \in A_{u_1}$, $g \in A_{u_2}$ polynômes semi-invariants pour sous l'action de G. avec $u_1 - u_2 = u$. Ainsi $h(u) = f/g$ est aussi semi-invariant par l'action de G.

Le diviseur que l'on construit ainsi $\mathcal{D}(u)$ est alors G-invariant. Dans le cas général $u \in \sigma^\vee \cap M$ où u n'est pas obligatoirement un élément saturé il suffit de choisir un multiple nu de u on peut alors définir le diviseur $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}(nu)/n$. □

2.2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.4.

Les propositions précédentes permettent d'exhiber un couple $(Y, \mathcal{D}_G)$ adaptée au cas d'un groupe abélien fini G commutant avec l'action du tore, on se doit maintenant de considérer toutes les situations possibles d'action de ce groupe fini G sur une $\mathbb{T}$-variété X tel que les deux actions commutent. Les trois cas possibles sont donc en premier le cas ou G est un sous-groupe d'isotropie du tore, ce cas est traité par le lemme 2.2.8. Le deuxième cas, traité dans le lemme 2.2.11, correspond à une action effective de $G \times \mathbb{T}$, et enfin le cas dit général où G peut s'écrire à l'aide de deux sous-groupes chacun correspondant à un des deux cas précédents.

Lemme 2.2.8. *Soit X la $\mathbb{T}$-variété $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ et soit G un sous-groupe fini du tore $\mathbb{T} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M])$. Alors $X' = X//G$ est une $\mathbb{T}'$-variété pour $\mathbb{T}' \simeq \mathbb{T}//G$ et elle est de plus isomorphe de manière équivariante à la variété $\mathbb{S}(Y, F_*(\mathcal{D}))$ où $F : N = M^\vee \to N' = (M')^\vee$ est l'application linéaire induite par l'inclusion du réseau des caractère M' de $\mathbb{T}'$ et M de $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit Y construit comme dans 1.3.2.1. Alors, étant donné que par hypothèse les orbites de G sont incluses dans les orbites de $\mathbb{T}$, l'action induite de G sur Y est triviale. Dans ce cas on a pour tout $u \in \sigma^\vee \cap M$, A_u^G est soit A_u soit $\{0\}$. En notant M' le sous-réseau de M généré par les éléments $u \in \sigma^\vee \cap M$ tel que $A_u^G \neq 0$,

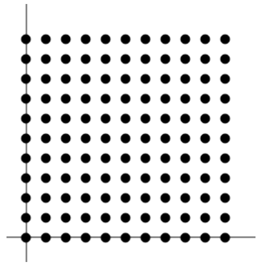
$$X' = X//G = \operatorname{Spec}\Big(\bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M'} A_u^G\Big)$$

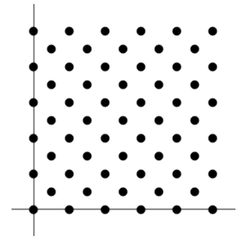
X' est une $\mathbb{T}'$-variété pour $\mathbb{T}' = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M'])$ un tore de la même dimension que celle de $\mathbb{T}$. L'inclusion du réseau des caractères M' de $\mathbb{T}'$ dans celui M de $\mathbb{T}$ donne l'application linéaire voulue $F : N = M^\vee \to N' = M'^\vee$. □

Remarque 2.2.9. Ce lemme explicite une application entre p-diviseurs, cela correspond donc à un triplet $(\mathrm{id}, F, 1)$ d'après la définition 1.3.9. En effet le morphisme quotient $\varphi : Y \to Y//G$ correspond à l'identité puisque l'action de G sur Y est triviale.

Exemple 2.2.10. Soit $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ muni d'une action de $(\mathbb{G}_m)^2$ donnée par $(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$, alors $\mathbb{A}^2$ en tant que variété torique est complètement déterminée par le réseau $M = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et le cône $\sigma^\vee$ tel que $\sigma^\vee \cap M$ soit généré par (e_1, e_2).

De plus on considère l'action du groupe cyclique μ_2 des racines carrées de l'unité donnée par $\epsilon \cdot (x, y) = (\epsilon x, \epsilon y)$. Étant donné que l'action de μ_2 sur $\mathbb{A}^2$ se factorise par celle de $(\mathbb{G}_m)^2$, on applique le lemme 2.2.8 pour obtenir que $\mathbb{A}^2//\mu_2 \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^2))$ en tant que variété torique est complètement déterminée par le réseau $M = \mathbb{Z}(2e_1) + \mathbb{Z}(e_1 + e_2)$ et le cône $\sigma^\vee$ tel que $\sigma^\vee \cap M'$ est généré par $(2e_1, 2e_2, e_1 + e_2)$.





$\sigma^\vee \cap M$ $\qquad\qquad$ $\sigma^\vee \cap M'$

Lemme 2.2.11. *Soit X une variété affine normale munie d'une action effective de $G\times\mathbb{T}$ où G est un groupe abélien fini. Alors il existe une variété semi-projective Y sur laquelle G agit et un p-diviseur G-invariant $\mathcal{D}_G$ sur Y tel que X soit isomorphe de manière $G\times\mathbb{T}$ équivariante à $\mathbb{S}(Y,\mathcal{D}_G)$.*

De plus $X//G$ est isomorphe de manière $\mathbb{T}$-équivariante à $\mathbb{S}(Y//G,\mathcal{D}')$ où $\mathcal{D}_G = \varphi_G^*(\mathcal{D}')$.

Démonstration. Par les lemmes 2.2.5 et2.2.7, Y est munie d'une action de G, et on peut supposer que X isomorphe de manière $G\times\mathbb{T}$ équivariante à $\mathbb{S}(Y,\mathcal{D}_G)$. Puisque $\mathcal{D}_G$ est stable par G, pour tout, $u\in\sigma^\vee\cap M$, $\Gamma(Y,\mathcal{O}(\mathcal{D}_G(u)))$est un sous-module de $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ G-invariant et de plus, il existe $\mathcal{D}'$ vérifiant $\varphi_G^*(\mathcal{D}')=\mathcal{D}_G$. On a donc :

$$\Gamma(X//G,\mathcal{O}_{X//G}) = (\bigoplus_{u\in\sigma^\vee\cap M}\Gamma(Y,\mathcal{O}(\mathcal{D}_G(u))))^G = \bigoplus_{u\in\sigma^\vee\cap M}\Gamma(Y,\mathcal{O}(\mathcal{D}_G(u)))^G.$$

Par hypothèse, $\varphi : Y\to Y//G$ est le morphisme quotient, et $\mathcal{D}'$ vérifie $\varphi_G^*(\mathcal{D}') = \mathcal{D}_G$.

Donc

$$\begin{aligned}\Gamma(Y,\mathcal{O}(\mathcal{D}_G(u)))^G &= \left\{f\in\mathbb{C}(Y)^G, div(f)+\mathcal{D}_G(u)\geq 0\right\}\cup\{0\}\\ &= \{h\in\mathbb{C}(Y//G),\varphi^*(\operatorname{div}(h)+\mathcal{D}'(u))\geq 0\}\cup\{0\}\\ &= \{h\in\mathbb{C}(Y//G),\operatorname{div}(h)+\mathcal{D}'(u)\geq 0\}\cup\{0\}.\end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $u\in\sigma^\vee\cap M$, on a bien $X//G\simeq \operatorname{Spec}(\bigoplus_{u\in\sigma^\vee\cap M}\Gamma(Y//G,\mathcal{O}(\mathcal{D}'(u))))$.

□

Remarque 2.2.12. Comme pour le lemme précédent, cette application décrit une application entre p-diviseurs, celle-ci est donnée par $(\varphi_G,\mathrm{id},1)$ d'après la définition 1.3.9. Ce lemme est analogue à la construction effectuée dans [D, 4.1], dans lequel Demazure établit un résultat semblable dans le cas des $\mathbb{Q}$-diviseurs.

Pour achever la démonstration il faut considérer le cas général pour une action d'un groupe fini G agissant sur une $\mathbb{T}$-variété $X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ tel que les deux actions commutent. A l'aide des lemmes 2.2.5 et 2.2.7, on peut supposer que G agit sur Y et que de plus $\mathcal{D}$ est un p-diviseur G-invariant.

On considère maintenant H le sous-groupe de $G \times \mathbb{T}$ qui est constitué des éléments agissant trivialement sur X. On pose alors $G_0 \subset G$ et $\mathbb{T}_0 \subset \mathbb{T}$ les images de H par les deux projections et on pose $G' = G/G_0$ et $\mathbb{T}' = \mathbb{T}/\mathbb{T}_0$. Par construction les orbites de l'action induite de G_0 sur X sont incluses dans les orbites de l'action induite de $\mathbb{T}_0$ sur X. Ainsi $X//G_0$ est alors munie d'une action effective de $G' \times \mathbb{T}'$. La conclusion découle alors des lemmes 2.2.8 et 2.2.11.

2.2.2.3 Exemples d'application du Théorème 2.2.4.

Illustrons le résultats dans le cas d'une action de $\mathbb{G}_m$ sur le plan affine puis sur l'exemple déjà utilisé donné dans [A-H, section 12].

Exemple 2.2.13. On considère $\mathbb{A}^2$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{T} \simeq \mathbb{G}_m$ donné par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda^2 x, \lambda^{-1} y)$ ainsi que de l'action du groupe μ_2 les racines carrées de l'unité donné par $\epsilon \cdot (x, y) \to (x, \epsilon y)$ on remarque que les orbites par l'action de μ_2 sont incluse dans celle de $\mathbb{G}_m$. On va donc en premier calculer à l'aide des méthodes usuelles la présentation de $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n)$ en tant que $\mathbb{T}$-variété puis on calculera à l'aide du théorème précédent $\mathbb{A}^2//\mu_2$ en tant que $\mathbb{T}'$-variété.

Le quotient algébrique est donné par :

$$\mathbb{A}^2//\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}^1 \simeq \mathrm{Spec}(A_0) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[xy^2]).$$

De plus on a que $\mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} A_n) \simeq \mathrm{Proj}_{A_0}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n) \simeq \mathbb{A}^1$ donc en appliquant les résultats de §1.4 on obtient que $Y(\mathbb{A}^2) \simeq \mathbb{A}^1$.

Pour ce qui est du p-diviseur il va ici être de la forme $\mathcal{D} = \sum [a_i, b_i] \otimes \{p_i\}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ et $p_i \in \mathbb{A}^1$ et cela est dû au fait que $\sigma = \{0\}$ (voir §1.4).

Pour le calcul explicite des valeurs on utilise la construction à l'aide de la suite exacte donnée en §1.3.2.2 pour obtenir $\mathcal{D} = [-\frac{1}{2}, 0] \otimes \{0\}$. Ainsi $\mathbb{A}^2$ est isomorphe à $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [-\frac{1}{2}, 0] \otimes \{0\})$.

Maintenant on pose $X' = \mathbb{A}^2//\mu_2$ en tant que $\mathbb{T}'$-variété :

$$\mathbb{A}^2//\mu_2 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y^2]) \simeq \mathbb{A}^2,$$

est muni d'une action du tore $\mathbb{T}'$ donné par $\lambda \cdot (x, y) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. On est dans le cas du lemme 2.2.8 donc $Y(X') \simeq \mathbb{A}^1$ et de plus $\mathcal{D}' = 2 \cdot \mathcal{D} = [-1, 0] \otimes \{0\}$.

Donc $\mathbb{A}^2//\mu_2 \simeq \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x^2, y])$ est isomorphe à $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [-1, 0] \otimes \{0\})$ on retrouve l'exemple 1.4.3.

Exemple 2.2.14. On considère la variété

$$X = \{x^3 + y^4 + zt = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

munie de l'action d'un tore $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{G}_m)^2$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$: $(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (\lambda_1^4 x, \lambda_1^3 y, \lambda_2 z, \lambda_1^{12}\lambda_2^{-1} t)$.

Alors X est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\mathbb{P}^1, \mathcal{D})$ où :

$$\mathcal{D} = \Delta_0 \otimes \{0\} + \Delta_1 \otimes \{1\} + \Delta_\infty \otimes \{\infty\},$$

avec $\Delta_0 = (1/3, 0) + \sigma$, $\Delta_1 = (-1/4, 0) + \sigma$, $\Delta_\infty = \{0\} \times [0, 1] + \sigma$ et σ est le cône généré par les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, 12)$ d'après [A-H, section 12].

On considère maintenant μ_3 le groupe des racines troisièmes de l'unité agissant sur $\mathbb{A}^4$ via $\epsilon \cdot (x, y, z, t) \to (\epsilon x, y, z, t)$. On vérifie facilement que μ_3 est un sous-groupe de $\mathbb{T}$ donné par $(\lambda_1, \lambda_2) = (\epsilon, 0)$ avec $\epsilon \in \mu_3$ et de plus X est stable par μ_3. Ainsi $X//\mu_3 \simeq \{x + y^4 + zt\} \simeq \mathbb{A}^3 \subset \mathbb{A}^4 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ est muni de l'action d'un tore $\mathbb{T}' \simeq (\mathbb{G}_m)^2$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$:

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (x, y, z, t) = (\lambda_1^4 x, \lambda_1 y, \lambda_2 z, \lambda_1^4 \lambda_2^{-1} t).$$

Le fait de passer au quotient sous l'action de μ_3 modifiera ainsi uniquement les coefficients Δ_i du diviseur et cela en multipliant la première coordonnée par l'ordre du groupe 3. En effet on peut décomposer $\mathbb{T} \simeq \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ on a alors $\mathbb{T}//\mu_3 \simeq \mathbb{T}_1//\mu_3 \times \mathbb{T}_2$. Si on note l'anneau gradué de la variété X par $A = \bigoplus_{(u_1,u_2)\in\mathbb{Z}^2} A_{(u_1,u_2)}$ alors l'anneau A' de la variété variété $X//\mu_3$ est donné par $A' = \bigoplus_{(u_1,u_2)\in\mathbb{Z}^2} A_{(3u_1,u_2)}$.

Ainsi $X//\mu_3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}')$ où :

$$\mathcal{D}' = \Delta_0' \otimes \{0\} + \Delta_1' \otimes \{1\} + \Delta_\infty' \otimes \{\infty\},$$

avec $\Delta_0' = (1, 0) + \sigma'$, $\Delta_1' = (-3/4, 0) + \sigma'$, $\Delta_\infty' = \{0\} \times [0, 1] + \sigma'$ et σ' est le cône généré par les vecteurs $(3, 0)$ et $(3, 12)$.

Ce qui est équivalent à dire que $X//\mu_3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\mathbb{P}^1, \mathcal{D}'')$ où :

$$\mathcal{D}'' = \Delta_1' \otimes \{1\} + \Delta_\infty' \otimes \{\infty\},$$

avec $\Delta_0' = (1, 0) + \sigma'$, $\Delta_1' = (-3/4, 0) + \sigma'$, $\Delta_\infty' = \{0\} \times [0, 1] + \sigma'$ et σ' est le cône généré par les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, 4)$.

Ceci est dû au fait que $\Delta_1' \otimes \{1\}$ correspond a un σ'-polyédral diviseur principal.

L'intérêt de ce théorème est double : évidemment comme illustré précédemment, dans un sens on peut déterminer la présentation de $X//G$ une $\mathbb{T}$-variété sous les bonnes hypothèses. Mais on peut aussi à l'aide de la présentation d'au moins deux variétés quotients bien choisis $X//G_1$ et $X//G_2$ reconstruire la présentation de la $\mathbb{T}$-variété X.

Chapitre 3

Espaces affines exotiques avec $\mathbb{G}_m$-actions

3.1 Topologie

Dans cette section on va décrire la topologie de certaines variétés affines obtenues à partir des deux constructions étudiées précédemment, les modifications affines et les recouvrements cycliques. On rappelle que X est une variété algébrique définie sur $\mathbb{C}$ et que de ce fait on peut munir X de la topologie euclidienne induite par la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}$. La plupart des résultats proviennent des articles de Kaliman et Zaidenberg ([Z, Ka-Z]) ainsi que des articles de tom Dieck [tD1, tD2]

Définition 3.1.1. Une variété irréductible X est dite *acyclique* si pour tout $i > 0$, $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$. De même X est dite $\mathbb{Q}$-acyclique si pour tout $i > 0$, $H_i(X, \mathbb{Q}) = 0$ et $\mathbb{Z}_p$-acyclique si pour tout $i > 0$, $H_i(X, \mathbb{Z}_p) = 0$.

Définition 3.1.2. Une variété X est *contractile* si elle est non vide et si l'application identité de X est homotope à une application constante de X dans X.

On caractérise la propriété d'être contractile ainsi : une variété topologique non vide est contractile si et seulement si elle a le même type d'homotopie qu'un point. D'après le Théorème de Whitehead [tD3, Théorème 20.1.5], une variété X est contractile si elle est acyclique, et que de plus son groupe fondamental est trivial, $\pi_1(X) = 1$.

Théorème 3.1.3. *[Ch-Di, Di] Une variété algébrique complexe lisse et contractile de dimension $d \geq 3$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2d}$.*

Définition 3.1.4. Une variété affine lisse de dimension d difféomorphe à l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^{2d}$ mais non isomorphe à $\mathbb{A}^d$ est appelée un *espace affine exotique.*

D'après un résultat de Ramanujan [Ra], il n'existe pas de surface exotique. Cependant il existe des exemples de surfaces affines lisses contractiles non isomorphe au plan affine $\mathbb{A}^2$. En dimension supérieure, diverses techniques permettent de construire des espaces affines exotiques. Dans ce qui suit on présentera des constructions faisant intervenir des modifications affines et des recouvrements cycliques.

3.1.1 Topologie des modifications affines

On considère une variété affine X et $X_{I,f}$ la modification affine de X de centre (I, f). On va expliciter des conditions qui garantissent que $X_{I,f}$ possède la même topologie que la variété affine de départ X.

Soit $\pi_I : \tilde{X} \to X$ l'éclatement le long du sous-schéma défini par l'idéal I et soit $E \in \tilde{X}$ son diviseur exceptionnel. On pose $E' := E \cap X_{I,f}$ la restriction de E à la modification affine de X de centre (I, f) et $D_f = \mathrm{div}(f)$ on a alors :

Théorème 3.1.5. *[Ka-Z]Supposons les conditions suivantes remplies :*

i) Les variétés X et $X_{I,f}$ sont lisses.

ii) Les diviseurs E' et $\mathrm{Supp}(D_f)$ sont irréductibles et $E' = \pi_I^*(\mathrm{Supp}(D_f))$.

iii) Les diviseurs E' et $\mathrm{Supp}(D_f)$ sont des variétés topologiques.

Alors la variété $X_{I,f}$ est contractile si et seulement si X , le sous-schéma correspondant à l'idéal I et $\mathrm{Supp}(D_f)$ le sont.

Le Théorème 3.1 dans [Ka-Z] garantit sous ces conditions que l'homologie est préservée par la modification affine en utilisant une suite exacte d'homologie et l'isomorphisme de Thom. Pour le groupe fondamental, la proposition 3.1, dans le même article de Kaliman et Zaidenberg, garantit qu'il est préservé par une modification affine respectant les conditions ci-dessus. Donc d'après le Théorème de Whitehead $X_{I,f}$ est bien contractile si et seulement si X l'est.

Exemple 3.1.6. On considère la modification du plan affine $\mathbb{A}^2$ de centre (I, f) où $I = (x-1, y-1)$ et f correspond à la courbe cuspidale $\{x^k - y^l = 0\} \subset \mathbb{A}^2$, $k, l \geq 2$ et $\mathrm{pgcd}(k, l) = 1$. La surface ainsi obtenue $X_{I,f}$ est une surface de tom Dieck–Petrie [tD1, tD2].

$$X_{I,f} = \{\frac{(xz+1)^k - (yz+1)^l - z}{z} = 0\} \subset \mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]).$$

Or une courbe cuspidale du type précédent est contractile : on peut par exemple la munir de l'action de $\mathbb{G}_m$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^2$, $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^l x, \lambda^k y)$, et faire tendre continument λ vers 0 de manière à obtenir une équivalence d'homotopie entre la courbe et l'origine de $\mathbb{A}^2$. Ainsi par le théorème précédent, cette surface est une surface contractile.

Théorème 3.1.7. *[tD1] Soit X une hypersurface lisse et contractile de $\mathbb{A}^n$, $n \geq 3$ contenant l'origine. Alors la modification hyperbolique de X à l'origine est une hypersurface difféomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{n+1}$.*

Exemple 3.1.8. Soit $X = \{x+z^2+t^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^3$ un plongement du plan $\mathbb{A}^2$ dans $\mathbb{A}^3$ tel que $(0, 0, 0) \in X$. Alors X' la modification hyperbolique de x à l'origine est une variété lisse contractile de dimension 3 munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$.

En effet $X' = \{x + yz^2 + y^2t^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4$ est un plongement de $\mathbb{A}^3$ dans $\mathbb{A}^4$ stable pour l'action linéaire de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda z, \lambda t)$.

3.1.2 Topologie des revêtements cycliques

On va expliciter des conditions qui garantissent que le recouvrement cyclique d'ordre k le long d'un diviseur D d'une variété affine conserve la topologie de la variété initiale.

Théorème 3.1.9. *[Ka] Soit $q : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ un polynôme quasi-invariant de poids l pour une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^n$. On suppose de plus que $F_0 = q^{-1}(0)$ est une hypersurface lisse et $\mathbb{Z}_k$-acyclique avec k et l premier entre eux et $F_a = q^{-1}(a)$ est connexe pour $a \neq 0$. Alors le recouvrement d'ordre k le long du diviseur $\{q(u) = 0\}$, $X = \{(x, u) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}^n \mid x^k + q(u) = 0\}$ est acyclique. De plus si $\pi_1(\mathbb{A}^n \setminus F_0) \simeq \mathbb{Z}$, alors X est contractile.*

Ce dernier théorème est un des points clés pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.10. *[tD2] Soit $n \geq 2$ et $p : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ un polynôme quasi-invariant de poids l pour une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^n$, tel que $p^{-1}(a) = F_a$ soit une hypersurface régulière pour $a = 0$ et qu'elle soit connexe pour $a \neq 0$. Soit k et s deux entiers naturels premiers avec l.*

Alors

$$X = \{(x, y, u) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^n \mid x^r + y^s + p(u) = 0\},$$

est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n+2}$.

De plus la fibre générale :

$$X = \{(x, y, u) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^n \mid x^k + y^s + p(u) = a \neq 0\},$$

n'est pas contractile si F_a ne l'est pas.

Le théorème suivant est une réécriture des théorèmes énoncés dans [K-R] qui permettent de déterminer toutes les variétés de dimension 3, lisses, contractiles avec action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$, ce résultat est donné sous cette forme particulière dans [Z].

Théorème 3.1.11. *Soit X une variété affine lisse, contractile munie d'une action effective de $\mathbb{G}_m$. Soient $q_i \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes semi-invariants de poids respectifs $d_1, \ldots, d_k$ tous positifs pour $i = 1, \ldots, k$ et une suite d'entiers $n_1, \ldots, n_k$ positifs. Supposons les conditions suivantes remplies :*

i) Pour tout $i = 1, \ldots, k$, les diviseurs $F_i := q_i^*(0)$ sont lisses et irréductibles, leur union $\cup_1^k F_i$ est un diviseur à croisements normaux et le groupe fondamental du complémentaire $\pi_1(X \setminus \cup_1^k F_i)$ est un groupe abélien

ii) $\mathrm{pgcd}(d_i, n_i) = \mathrm{pgcd}(n_i, n_j) = 1$ *pour tout $i, j = 1, \ldots, k$*

iii) Pour tout $i = 1, \ldots, k$, F_i est $\mathbb{Z}_p$-acyclique pour tout p premier qui divise n_i.

Alors le recouvrement multicyclique $Y \to X$ de X d'ordre n_i le long de F_i pour $i = 1, \ldots, k$ est une variété affine lisse contractile.

$$Y = \{u_i^{n_i} = q_i(x), i = 1, \ldots, k\} \subset X \times \mathbb{A}^k = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X][u_1, \ldots, u_k]).$$

3.2 Constructions historiques des variétés de Koras-Russell

Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une variété affine de dimension 3, lisse, rationnelle et contractile. On la suppose de plus munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ avec un unique point fixe x_0 tel que l'action linaire de $\mathbb{G}_m$ dans l'espace tangent au point fixe $T_{x_0} \simeq \mathbb{A}^3$ soit donné par $\lambda \cdot (Y, Z, T) \to (\lambda^{a_1}Y, \lambda^{a_2}Z, \lambda^{a_3}T)$ avec $a_1 < 0$ et $a_2, a_3 > 0$ et $\mathrm{pgcd}(a_1, a_2, a_3) = 1$. Alors X est soit $\mathbb{A}^3$ soit une variété dite de Koras-Russell.

Historiquement ces variétés ont été classifiées par Koras-Russell [K-R], comme étape dans la démonstration de la linéarisation des actions de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$. La linéarisation des actions non-hyperbolique sur $\mathbb{A}^3$ était établie auparavant par Kambayashi et Russell dans [Kam-R, Théorème 3.4] mais la démonstration complète fut achevée après avec la collaboration de Kaliman et Makar-Limanov [Ka-K-ML-R] qui ont démontré que les variétés de Koras-Russell étaient des espaces exotiques. On va donner dans cette section les différents procédés de construction de ces variétés. Elles serviront par la suite d'exemples de $\mathbb{T}$-variétés de complexité 2.

3.2.1 Construction algébrique des variétés de Koras-Russell

Voici la construction telle quelle apparait dans [K-R] :

On considère $W = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X, Y, Z]) = \mathrm{Spec}(B)$, où X, Y, Z sont des coordonnées, on munit W d'une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ tel que les poids de Y, X et Z soient respectivement a_1, a_2 et a_3. On considère $F := (F_1, F_2, F_3)$ un automorphisme équivariant de W pour l'action de $\mathbb{G}_m$ tel que $T = F_1(X, Y, Z)$, $Y = F_2(X, Y, Z)$ et $X' = F_3(X, Y, Z)$ soit respectivement semi-invariants de poids a_2, a_1 et a_3.

On choisit finalement un triplet d'entiers $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ deux à deux premiers entre eux vérifiant de plus $\mathrm{pgcd}(\alpha_i, a_i) = 1$ pour $i = 1, 2, 3$. On construit alors le recouvrement multicyclique de W d'ordre α_1 le long du diviseur $\{Y = 0\}$, d'ordre α_2 le long du diviseur $\{Z = 0\}$ et d'ordre α_3 le long du diviseur $\{T = F_1(X, Y, Z) = 0\}$. Ainsi $X = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = \mathbb{C}[X, y, z, t]/(t^{\alpha_3} - F_1(y^{\alpha_1}, X, z^{\alpha_2}))$ et le morphisme $X \to W$ est donné par $(y, z, t) \to (Y, Z, T) = (y^{\alpha_1}, z^{\alpha_2}, t^{\alpha_3})$

Étant donné $G := (G_1, G_2, G_3)$ l'inverse de F on a également X comme le recouvrement multicyclique donnant $A \simeq \mathbb{C}[X', y, z, t]/(z^{\alpha_2} - G_3(y^{\alpha_1}, X', t^{\alpha_3}))$.

Exemple 3.2.1 (La cubique de Russell)**.** C'est la plus connue de ces variétés. Elle a comme équation $\{x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ et admet une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$: $\lambda \cdot (x, y, z, t) \to (\lambda^6 x, \lambda^{-6} y, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$.

On remarque que X est donc construit comme recouvrement bicyclique de $\mathbb{A}^3$. En effet on considère les actions de μ_{α_2} et μ_{α_3} les groupes des racines α_2-

ième et α_3-ième de l'unité. Alors X est stable par l'action de $\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}$ donnée par $(\epsilon_{\alpha_2}, \epsilon_{\alpha_3}) \cdot (x, y, z, t) \to (x, y, \epsilon_{\alpha_2} z, \epsilon_{\alpha_3} t)$. De plus X est stable par l'action de μ_{α_1} donnée par $\epsilon_{\alpha_1} \cdot (x, y, z, t) \to (x, \epsilon_{\alpha_1} y, z, t)$ ainsi on a deux tours de variétés obtenues par recouvrements cycliques :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X//\mu_{\alpha_2} \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dr] & & X//\mu_{\alpha_3} \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dl] \\
& \mathbb{A}^3 \simeq X//(\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}) \arrow[d] & \\
& \mathbb{A}^3 \simeq X//(\mu_{\alpha_1} \times \mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d] & \\
& X//\mu_{\alpha_1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X//(\mu_{\alpha_1} \times \mu_{\alpha_2}) \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dr] & & X//(\mu_{\alpha_1} \times \mu_{\alpha_3}) \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dl] \\
& \mathbb{A}^3 \simeq X//(\mu_{\alpha_1} \times \mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}) &
\end{tikzcd}$$

Dans ces deux tours de recouvrements cycliques il n'y a que X et $X//\mu_{\alpha_1}$ qui peuvent ne pas être isomorphes à $\mathbb{A}^3$. En effet si on considère les deux présentations de $X = \mathrm{Spec}(A)$ avec $A = \mathbb{C}[x, y, z, t]/(t^{\alpha_3} - G(y^{\alpha_1}, x, z^{\alpha_2}))$ ou $A = \mathbb{C}[x', y, z, t]/(z^{\alpha_2} - F(y^{\alpha_1}, x', t^{\alpha_3}))$ on constate que $A^{\mu_{\alpha_2}} = \mathbb{C}[x', y, , t]$ et $A^{\mu_{\alpha_3}} = \mathbb{C}[x', y, , z]$.

On pose d le degré en la variable x du polynôme $G(y^{\alpha_1}, x, z^{\alpha_2})$ et $\epsilon = (d - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)$ alors Makar-Limanov a établi le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. *[K-R, Théorème 5.1]Avec les notations précédentes, X est isomorphe à $\mathbb{A}^3$ si et seulement si $\epsilon = 0$.*

En particulier si $\alpha_2 - 1 = 0$ ou $\alpha_3 - 1 = 0$ cela revient à dire que l'on a effectué un recouvrement cyclique d'ordre 1 le long d'un diviseur sur $\mathbb{A}^3$, ce qui correspond simplement à un changement de variables.

3.2.2 Construction géométrique des variétés de Koras-Russell

La construction précédente peut être reformulée, ceci afin de faire intervenir de manière plus explicite la topologie des diviseurs sur lesquels sont effectués les recouvrements cycliques.

Soient a', b' et c' des entiers naturels positifs deux à deux premiers avec $b' \geq c'$. Soit $\mu_{a'}$, le groupe des racines a'-ième de l'unité, agissant sur $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v])$ comme suit : $\epsilon_{a'} \cdot (u,v) \to (\epsilon_{a'}^{c'} u, \epsilon_{a'}^{b'} v)$. On considère un polynôme $f \in \mathbb{C}[u,v]$ qui admet les propriétés suivantes :

i) f est semi-invariant pour l'action de $\mu_{a'}$ tel que le poids de f soit congru à b' modulo a'

ii) $L = \{f = 0\}$ est isomorphe à une droite et coupe l'axe $u = 0$ transversalement à l'origine et en $d-1$ autres points distincts.

Sous ces hypothèses le polynôme $s^{-c'} f(s^{c'} u, s^{b'} v)$ peut alors être réécrit sous la forme $F(w,u,v)$ avec $w = s^{a'}$ et F est semi-invariant de poids b'pour l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\lambda \cdot (w,u,v) \longmapsto (\lambda^{-a'} w, \lambda^{c'} u, \lambda^{b'} v)$.

On choisit maintenant un triplé d'entier $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tel qu'ils soient deux à deux premiers et que de plus $\mathrm{pgcd}(\alpha_i, a_i) = 1$ pour $i = 1,2,3$ alors l'hypersurface

$$X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{A}^4 / t^{\alpha_3} + F(y^{\alpha_1}, z^{\alpha_2}, x) = 0\},$$

est une hypersurface de Koras-Russell.

La construction initiale débute avec deux polynômes f et $g \in \mathbb{C}[u,v]$ semi-invariants et tel que les lieux de leurs zéros soient isomorphes à $\mathbb{A}^1$([K-R]), le recouvrement bicyclique de $\mathbb{A}^3$ ainsi obtenu est alors une sous-variété de $\mathbb{A}^5$ de codimension 2 (2.2.2). Or par le Théorème d'épimorphisme ([Ab-M]) on peut supposer sans perte de généralité que $g(u,v) = u$ et ainsi se ramener au cas ci-dessus. Cela revient à dire que les variétés de dimension 3, lisses, contractiles et munies d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ sont réalisables comme hypersurfaces de $\mathbb{A}^4$ mais que dans le cas où la variété est de dimension supérieure on ne peut pas garantir une telle représentation.

Il existe deux sous-familles particulières dans les hypersurfaces de Koras-Russell, la distinction provient des actions du groupe additif $\mathbb{G}_a$ dont elles sont munies (voir [Ka-ML1, Théorème 8.4]) :

i) Les hypersurfaces dites de première espèce, elles admettent comme équation :

$$X_1 = \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\},$$

avec $2 \leq d$, $2 \leq \alpha_2 < \alpha_3$ et $\mathrm{pgcd}(\alpha_2, \alpha_3) = 1$. Elles sont munies d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donné par $\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^{\alpha_2 \alpha_3} x, \lambda^{-(d-1)\alpha_2 \alpha_3} y, \lambda^{\alpha_3} z, \lambda^{\alpha_2} t)$. Cela correspond au choix de $f = u + v + v^d$ dans la construction précédente et $\alpha_1 = 1$.

ii) Les hypersurfaces dites de seconde espèce, elles admettent comme équation :

$$X_2 = \{x + y(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\},$$

avec $2 \leq d$, $1 \leq l$, $2 \leq \alpha_2 < \alpha_3$ et $\mathrm{pgcd}(\alpha_2, d) = \mathrm{pgcd}(\alpha_2, \alpha_3) = 1$. Elles sont munies d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donné par $\lambda \cdot (x, y, z, t) \to (\lambda^{\alpha_2\alpha_3}x, \lambda^{-(dl-1)\alpha_2\alpha_3}y, \lambda^{d\alpha_3}z, \lambda^{\alpha_2}t)$. Cela correspond au choix de $f = v + (u + v^d)^l$ dans la construction précédente et $\alpha_1 = 1$.

3.2.3 Topologie des variétés de Koras-Russell

On démontre à présent, à l'aide des résultats de la section précédente, que ces deux sous-familles sont bien des variétés contractiles.

Proposition 3.2.3. *Les hypersurfaces de Koras-Russell de première et de seconde espèces sont des variétés contractiles.*

Démonstration. Dans le cas des hypersurfaces de Koras-Russell de première espèce, X_1, on considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, z, t])$ ainsi que $I = (f, g)$ où $f = -x^d$ et $g = x + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3}$, alors la modification affine de $\mathbb{A}^3$ le long du diviseur $D_f = dD_x$ avec pour centre l'idéal $I = (-x^d, x + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3}) \subset \mathbb{A}^3$, l'idéal I est supporté par la courbe cuspidale contenue dans le plan $\{x = 0\}$ et qui a pour équation : $C = \{x = z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$. Alors les conditions du Théorème 3.1.5 sont satisfaites ainsi $X_1 = \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$ est contractile.

De même pour les hypersurface $X_2 = \{x+y(x^d+z^{\alpha_2})^l+t^{\alpha_3} = 0\}$, on considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, z, t])$ ainsi que $I = (f, g)$ où $f = -(x^d+z^{\alpha_2})$ et $g = x+t^{\alpha_3}$, alors la modification affine de $\mathbb{A}^3$ le long du diviseur D_f (qui est une courbe cuspidale car par hypothèse $\mathrm{pgcd}(d, \alpha_2) = 1$) avec pour centre l'idéal $I = (-(x^d+z^{\alpha_2}), x+t^{\alpha_3}) \subset \mathbb{A}^3$, l'idéal I est supporté par la courbe cuspidale contenue dans l'hypersurface $\{x + t^{\alpha_3} = 0\} \simeq \mathbb{A}^2$. Alors les conditions du Théorème 3.1.5 sont satisfaites ainsi $X_2 = \{x + y(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\}$ est contractile. □

Un autre moyen de prouver que ces variétés sont contractiles est d'utiliser le Théorème 3.1.11. On va appliquer ce théorème dans certains cas pour montrer qu'il correspond bien à la construction précédente, l'idée est de les construire en deux temps, premièrement des modifications hyperboliques pour obtenir des polynômes semi-invariants de poids 1 (proposition 2.1.7) puis des recouvrements multicycliques bien choisis.

On considère $X = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, z])$, et on choisit deux courbes $L_1 = \{f = 0\}$ et $L_2 = \{g = 0\}$ avec $f, g \in \mathbb{C}[x, z]$ chacune isomorphe à $\mathbb{A}^1$. On suppose de plus que L_1 et L_2 s'intersectent à l'origine et en $d-1$ autres points. Après utilisation du théorème d'épimorphisme on peut toujours supposer que $g(x, z) = z$. On suppose que L_1 est un graphe, c'est-à-dire, $f(x,z) = z+p(x)$. On applique une modification hyperbolique à f et g, on obtient alors $F(x,y,z) = z + p(xy)/y$ et $G(x,y,z) = z$.

Les deux hypersurfaces ainsi obtenues dans $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$ sont chacune isomorphe à $\mathbb{A}^2$, se rencontrent transversalement et $\pi_1(\mathbb{A}^3 \backslash (\{F=0\} \cup \{G=0\})) \simeq \mathbb{Z}^k$ est un groupe abélien, la valeur de k dépend du type d'intersection de L_1 avec L_2. Grâce à la modification hyperbolique les polynômes F et G sont semi-invariant de poids 1 pour l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3 : \lambda \cdot (x,y,z) \to \lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda z$.

On considère alors le recouvrement bi-cyclique de $\mathbb{A}^3$ d'ordre α_2 le long de $\{G=0\}$ et d'ordre α_3 le long de $\{F=0\}$, on obtient l'hypersurface :

$$X = \{p(xy)y^{-1} + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\},$$

et par le Théorème 3.1.11 X est contractile. On reconnait ici la construction effectuée en début de section.

Exemple 3.2.4.

i) On considère le polynôme $f(x,z) = x + x^2 + z$ et $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, on obtient alors la Cubique de Russell $\{x + x^2 y + z^2 + t^3 = 0\}$.

ii) On considère le polynôme $f(x,z) = x + x^d + z$ sans spécialiser α_2 et α_3, on obtient alors la variété $X = \{x + x^d y^{d-1} + z^2 + t^3 = 0\}$.

La variété obtenue dans le second exemple est donc contractile, elle est lisse, il suffit de calculer les dérivés partielles, est munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. C'est donc une variété de Koras-Russell, cependant elle ne correspond ni à une hypersurface de Koras-Russell de première espèce ni a celle de seconde espèce. Cette variété et toutes les autres qui correspondent à cette description font partie de troisième espèce, elles sont caractérisées par le fait quelles ne possèdent pas de $\mathbb{G}_a$-action[Ka-ML1].

Cependant il faut remarquer que $\{x + x^d y^{d-1} + z^2 + t^3 = 0\}$ est le recouvrement cyclique d'ordre $d-1$-ième de la variété $X_{d-1} = \{x + x^d y + z^2 + t^3 = 0\}$ le long du diviseur $\{y = 0\}$. On a $X//\mu_{d-1} \simeq X_{d-1}$, cela correspond à la deuxième tour de variétés obtenues à l'aide de recouvrement cyclique que l'on a construit précédemment.

3.3 Présentation A-H des variétés de Koras-Russell

On utilise maintenant le Théorème 2.2.4 dans l'autre sens, c'est-à-dire, construire la présentation d'une variété à partir de la présentation de deux de ses quotients. On commencera par décrire la présentation en terme de p-diviseur de la cubique de Russell, ce résultat était déjà établi dans [I-V] mais il est utile de le rappeler, il servira de modèle pour la présentation générale. La cubique admet pour équation $X = \{x + x^2 y + z^2 + t^3 = 0\}$ dans $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t])$. On rappelle que cette variété est donnée par les paramètres $a' = b' = c' = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ et $f(u,v) = u + v + v^2$ dans la construction générale 3.2. Par construction X est munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donnée par $\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^6 x, \lambda^{-6} y, \lambda^3 z, \lambda^2 t)$. Son quotient algébrique $X//\mathbb{G}_m$ est isomorphe à $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v])$ avec $u = yz^2$ et $v = yx$. On aurait pu choisir un autre système de coordonnées donné par $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u',v])$ avec $u' = yt^3$ et $v = yx$, en effet les variables z et t jouent un rôle symétrique.

Proposition 3.3.1. *La cubique de Russell est isomorphe à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$ pour*

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{2}\right\} D_3 + \left\{-\frac{1}{3}\right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{6}\right] E,$$

où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)} \to \mathbb{A}^2$, et où D_2 et D_3 sont les transformés stricts des courbes $\{u = 0\}$ et $\{u + v + v^2 = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2$ respectivement.

Démonstration. On considère les deux projections $\Phi_2 = \mathrm{pr}_{x,y,t} : X \to X_2 = \mathbb{A}^3$ et $\Phi_3 = \mathrm{pr}_{x,y,z} : X \to X_3 = \mathbb{A}^3$ qui correspondent au fait que X est construit comme recouvrement bi-cyclique de $\mathbb{A}^3$ de degré 2 et 3. Ainsi on peut considérer l'action des groupes cyclique μ_2 et μ_3 agissant sur X via $\xi \cdot (x,y,z,t) = (x,y,\xi z,t)$ et $\zeta \cdot (x,y,z,t) = (x,y,z,\zeta t)$ respectivement. On remarque de plus que ces deux actions commutent et que le quotient $X_6 = X//(\mu_2 \times \mu_3)$est isomorphe à $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$. Soit $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ l'anneau de coordonnées de X munie de la graduation correspondant à l'action de $\mathbb{G}_m$, on a alors $X_\ell = \mathrm{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_{\ell n})$, $\ell = 2,3,6$. Ce qui permet de retrouver le diagramme $\mathbb{G}_m$-équivariant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\Phi_2"'] \arrow[dr, "\Phi_3"] \arrow[dd, "\Phi_6"'] & \\
X_2 = X//\mu_2 \arrow[dr] & & X_3 = X//\mu_3 \arrow[dl] \\
 & X_6 = X//(\mu_2 \times \mu_3) &
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{G}_m$ agit linéairement sur X_2, X_3 et X_6 via $\lambda \cdot (x,y,t) \to (\lambda^3 x, \lambda^{-3} y, \lambda^1 t)$ pour X_2, $\lambda \cdot (x,y,z) \to (\lambda^2 x, \lambda^{-2} y, \lambda z)$ pour X_3 et $\lambda \cdot (x,y,z) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda z)$ pour X_6.

De plus on est dans le cas particulier où l'action de $\mu_2 \times \mu_3$ sur X se factorise par celle de $\mathbb{G}_m$, ce qui implique par le Théorème 2.2.4 que Φ_2 correspond à l'application entre p-diviseurs $(\mathrm{id}, F_2, 1)$ et Φ_3 correspond à l'application $(\mathrm{id}, F_3, 1)$ avec $F_\ell^*(\mathcal{D}) = \ell\mathcal{D}$, $\ell = 2,3,6$.

On a donc que les variétés $Y(X)$ et $Y(X_\ell)$, $\ell = 2,3,6$ sont toutes isomorphes à $\tilde{\mathbb{A}}^2$. Il faut maintenant déterminer les p-diviseur $\mathcal{D}$. On va l'obtenir à partir de $\mathcal{D}_2$ et$\mathcal{D}_3$ qui sont les p-diviseurs correspondant à X_2 et X_3 respectivement.

Avec les résultats de 1.4.11 , $X_2 = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D}_2 = \{\frac{1}{3}\}D_2 + [0,\frac{1}{3}]E)$ où D_2 est le transformé strict de la courbe $\{u=0\}$ et E le diviseur exceptionnel de l'éclatement de même $X_3 = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v)}, \mathcal{D}_3 = \{\frac{1}{2}\}D_3 + [0,\frac{1}{2}]E)$ où D_3 est le transformé strict de la courbe $\{u'=0\}$ et E le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Le Théorème 2.2.4 implique que $2\mathcal{D} \sim \mathcal{D}_2 = \{\frac{1}{3}\}D_2 + [0,\frac{1}{3}]E$ et $3\mathcal{D} \sim \mathcal{D}_3 = \{\frac{1}{2}\}D_3 + [0,\frac{1}{2}]E$. On a donc $\mathcal{D}_2 + \mathcal{D} = \mathcal{D}_3$ ce qui correspond bien à $\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{2}\right\} D_3 + \left\{-\frac{1}{3}\right\} D_2 + \left[0,\frac{1}{6}\right] E$. □

Le choix des coefficients n'est pas unique. En effet, on à $\mathcal{D}' \sim \mathcal{D} + \mathrm{div}(f)$ pour n'importe quelle fonction rationnelle f sur Y. Cela correspond par exemple à $\mathcal{D}' \sim \mathcal{D} + D_3 + E$ et plus généralement, pour toutes les paires $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $3a + 2b = 1$ on a $\mathcal{D} \sim \left\{\frac{a}{2}\right\} D_3 + \left\{\frac{b}{3}\right\} D_2 + \left[0,\frac{1}{6}\right] E$.

3.3.1 Les variétés de Koras-Russell de première espèce.

On utilise dans cette section une méthode similaire à la précédente pour toutes les variétés de Koras-Russell de première espèce, c'est-à-dire de la forme :

$$X = \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t]).$$

L'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ est induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donné par :

$$\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^{\alpha_2\alpha_3}x, \lambda^{-(d-1)\alpha_2\alpha_3}y, \lambda^{\alpha_3}z, \lambda^{\alpha_2}t).$$

La différence dans ce cas est que $X//\mathbb{C}^*$ est isomorphe à $\mathbb{A}^2_{(u,v)}//\mu_{d-1}$ où μ_{d-1} agit via $\xi \cdot (u,v) = (\xi u, \xi v)$.

On considère donc un recouvrement cyclique V de X d'ordre $d-1$ le long du diviseur $\{y=0\}$, donné par l'équation $V = \{x + x^d y^{d-1} + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$ dans $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t])$, V est alors elle aussi munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$, mais celle ci est induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$donné par $\lambda \cdot (x,y,z,t) \to (\lambda^{\alpha_2\alpha_3}x, \lambda^{-\alpha_2\alpha_3}y, \lambda^{\alpha_3}z, \lambda^{\alpha_2}t)$. Ainsi $V//\mathbb{G}_m$ est isomorphe à $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v])$ où $u = yz^{\alpha_2}$ et $v = yx$.

De plus $\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3} \times \mu_{d-1}$ agit sur V via $(\zeta, \epsilon, \xi) \cdot (x,y,z,t) \to (x, \xi y, \zeta z, \epsilon t)$. Dans ces conditions on a que $\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}$ sur V se factorise par celle de $\mathbb{G}_m$, cela donne le diagramme suivant sur le morphismes quotients :

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\Phi_{\alpha_2}"'] \arrow[d, "\Phi_{\mu_{d-1}}"] \arrow[dr, "\Phi_{\alpha_3}"] & \\
\mathbb{A}^3 \simeq V//\mu_{\alpha_2} & X = V//\mu_{d-1} & \mathbb{A}^3 \simeq V//\mu_{\alpha_3}.
\end{tikzcd}$$

On applique alors le Théorème 2.2.4, l'application Φ_{α_2} correspond alors à l'application entre p-diviseurs $(\mathrm{id}, F_{\alpha_2}, 1)$ et Φ_{α_3} correspond alors à l'application entre p-diviseurs $(\mathrm{id}, F_{\alpha_3}, 1)$ avec $F_{\alpha_i}^*(\mathcal{D}) = \alpha_i \mathcal{D}$, $i = 2, 3$. De plus $Y(V)$ est isomorphe à l'éclatement $\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}$ de $\mathbb{A}^2$ à l'origine sur le quel $\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3} \times \mu_{d-1}$ agit via $(\zeta, \epsilon, \xi) \cdot (u, v) = (\xi u, \xi v)$.

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Y(V) \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\varphi_{\mu_{d-1}}"'] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
Y(V_{\alpha_2}) & Y(X) \simeq Y(V)//\mu_{d-1} & Y(V_{\alpha_3}).
\end{tikzcd}$$

Avec les résultats de 4.2.6 on obtient la présentation A-H de $V//\mu_{\alpha_2}$ et de $V//\mu_{\alpha_3}$ donné par $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D}_{\alpha_2} = \{\frac{1}{\alpha_3}\}D_{\alpha_2} + [0, \frac{1}{\alpha_3}]E)$ où D_{α_2} est le transformé strict de la courbe $\{u = 0\}$, E est le diviseur exceptionnel et $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v)}, \mathcal{D}_{\alpha_3} = \{\frac{1}{\alpha_2}\}D_{\alpha_3} + [0, \frac{1}{\alpha_2}]E)$ où D_{α_3} est le transformé strict de la courbe $\{u' = 0\}$, E est le diviseur exceptionnel. Ce qui implique que V est isomorphe à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{a}{\alpha_2}\right\} D_{\alpha_3} + \left\{\frac{b}{\alpha_3}\right\} D_{\alpha_2} + \left[0, \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\right] E \ (*),$$

où E est le diviseur exceptionnel de $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)} \to \mathbb{A}^2$, D_{α_2} et D_{α_3} sont les transformés stricts des courbes $\{u = 0\}$ et $\left\{u + v + v^d = 0\right\}$ dans $\mathbb{A}^2_{(u,v)}$ respectivement, et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sont choisis tel que $a\alpha_3 + b\alpha_2 = 1$.

En appliquant le Théorème 2.2.4 pour l'action de μ_{d-1} on obtient alors :

Proposition 3.3.2. *Les variétés de Koras-Russell données par l'équation* $X = \{x + x^d y + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$ *dans* $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ *sont isomorphe à* $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}//\mu_{d-1}, \mathcal{D}')$ *avec*

$$\mathcal{D}' = \left\{\frac{a}{\alpha_2}\right\} D'_{\alpha_3} + \left\{\frac{b}{\alpha_3}\right\} D'_{\alpha_2} + \left[0, \frac{1}{(d-1)\alpha_2\alpha_3}\right] E'$$

où $\mathcal{D} = \varphi^*_{\mu_{d-1}}(\mathcal{D}')$, $\mathcal{D}$ *étant donné dans la relation* $(*)$ *et* D'_{α_3},D'_{α_2} *sont des diviseurs premiers et* E' *est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de la singularité dans* $\mathbb{A}^2//\mu_{d-1}$.

3.3.2 Les variétés de Koras Russell de seconde espèce

Pour les variétés de Koras-Russell de seconde espèce données par l'équation

$$X = \{x + y(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

la construction de la présentation A-H va être quelque peu différente. En effet les variables z et t ne jouent pas un rôle symétrique dans le cas présent. On va tout de même considérer un recouvrement cyclique V de X, mais dans ce cas $V//\mu_{\alpha_2}$ ne sera pas isomorphe à $\mathbb{A}^3$. On rappelle que α_2 et d sont premiers entre eux.

Soit $V = \{x + y^{dl-1}(x^d + z^{d\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\}$ le recouvrement bi-cyclique de X de degré d le long du diviseur $\{z = 0\}$ et de degré $dl - 1$ le long du diviseur $\{y = 0\}$.

Alors V est munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$donné par $\lambda\cdot(x, y, z, t) \to (\lambda^{\alpha_2\alpha_3}x, \lambda^{-\alpha_2\alpha_3}y, \lambda^{\alpha_3}z, \lambda^{\alpha_2}t)$ et de plus elle est munie d'une action de $\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3} \times \mu_{dl-1} \times \mu_d$ donné par $(\zeta, \epsilon, \xi, \delta)\cdot(x, y, z, t) = (x, \xi y, \zeta\delta z, \epsilon t)$. L'action de $\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}$ sur V se factorise pas l'action de $\mathbb{G}_m$, on obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\Phi_{\alpha_2}"'] \arrow[d, "\Phi_{\mu_d}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\alpha_3}"] & \\
V_{\alpha_2} = V//\mu_{\alpha_2} & V_d = V//\mu_d \arrow[d, "\Phi_{\mu_{dl-1}}"'] & V_{\alpha_3} = V//\mu_{\alpha_3} \\
 & X = V//(\mu_d \times \mu_{dl-1}) &
\end{tikzcd} .$$

Par le Théorème 2.2.4, on considère Φ_{α_3}, et on obtient que $Y(V)$est isomorphe à l'éclatement $\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}$ de $\mathbb{A}^2$ où $u = yz^{\alpha_2}$ et $v = yx$ et sur lequel $\mu_{\alpha_2}\times\mu_{\alpha_3}\times\mu_{dl-1}\times\mu_d$ agit via $(\zeta, \epsilon, \xi, \delta) \cdot (u, v) = (\xi\delta^{\alpha_2}u, \xi v)$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Y(V) \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\varphi_{\mu_d}"'] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
Y(V_{\alpha_2}) & Y(V_d) \arrow[d, "\varphi_{\mu_{dl-1}}"'] & Y(V_{\alpha_3}) \\
 & Y(X) &
\end{tikzcd} .$$

L'équation de V_{α_2} est donnée dans $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ par $V_{\alpha_2} = \{x + y^{dl-1}(x^d+z^d)^l+t^{\alpha_3} = 0\}$ ou si on réécrit l'équation, $V_{\alpha_2} = \{y^{-1}H(xy, zy)+t^{\alpha_3} = 0\}$ avec $H(x, z) = x + (x^d + z^d)^l$ ainsi d'après la proposition 1.4.10 $V_{\alpha_2} = Z(H, p)$ pour $H(x, z) = x + (x^d + z^d)^l$ et $p = 3$.

On a alors $V_{\alpha_2} = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D}_{\alpha_2} = \{\frac{1}{\alpha_3}\}D_{\alpha_2} + [0, \frac{1}{\alpha_3}]E)$ où D_{α_2} est le transformé strict de la courbe $\left\{v + (v^d + u^d)^l) = 0\right\}$ et E est le diviseur exceptionnel.

Pour $V_{\alpha_3} \simeq \mathbb{A}^3$ on a $V_{\alpha_3} = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D}_{\alpha_3} = \{\frac{1}{\alpha_2}\}D_{\alpha_3} + [0, \frac{1}{\alpha_2}]E)$ où D_{α_3} est le transformé strict de la courbe $\{u = 0\}$ et E est le diviseur exceptionnel.

On a donc $V = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{a}{\alpha_2}\right\} D_{\alpha_3} + \left\{\frac{b}{\alpha_3}\right\} D_{\alpha_2} + \left[0, \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\right] E,$$

où E est le diviseur exceptionnel de $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)} \to \mathbb{A}^2$, et où D_{α_2} et D_{α_3} sont les transformés stricts de $\left\{v + (v^d + u^d)^l) = 0\right\}$ et $\{u = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2$ respectivement, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ satisfont quant à eux $a\alpha_3 + b\alpha_2 = 1$.

On peut alors appliquer le Théorème 2.2.4 et on obtient que $V_d = \mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v'^d)}, \mathcal{D}_d)$ avec

$$\mathcal{D}_d = \left\{\frac{a'}{\alpha_2}\right\} D_{d,\alpha_3} + \left\{\frac{b'}{\alpha_3}\right\} D_{d,\alpha_2} + \left[0, \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\right] E_d \ (**),$$

où $a' = a/d$, $b' = b$, E_d est le diviseur exceptionnel de $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v'^d)} \to \mathbb{A}^2$ ceci étant dû au fait que $\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v')}//\mu_d \simeq \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v'^d)}$ pour l'action deμ_d décrite en préambule, et où D_{d,α_2} et D_{d,α_3} sont les transformés stricts des courbes $\left\{v' + (u' + v'^d)^l) = 0\right\}$ et $\{u' = 0\}$ ($u' = \varphi_d(u^d)$) dans $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u', v'])$ respectivement.

On peut alors appliquer le Théorème 2.2.4 pour obtenir :

Proposition 3.3.3. *Les variétés de Koras-Russell de seconde espèce $X = \{x + y(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\}$ dans $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ sont isomorphes de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v'^d)}//\mu_{dl-1}, \mathcal{D}_{d(dl-1)})$ avec*

$$\mathcal{D}_{d(dl-1)} = \left\{\frac{a'}{\alpha_2}\right\} D_{d(dl-1),\alpha_3} + \left\{\frac{b'}{\alpha_3}\right\} D_{d(dl-1),\alpha_2} + \left[0, \frac{1}{(dl-1)\alpha_2\alpha_3}\right] E_{d(dl-1)},$$

où $\mathcal{D}_d = \varphi^*_{\mu_{dl-1}}(\mathcal{D}_{d(dl-1)})$, $\mathcal{D}_d$ étant défini dans la relation $(**)$ et $E_{d(dl-1)}$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de la singularité dans $\mathbb{A}^2//\mu_{dl-1}$.

On peut à présent mieux comprendre le rôle des paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et f, g dans la construction de ces variétés (voir§3.2). Ainsi le choix des paramètres numériques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont à mettre en relation avec les coefficients des p-diviseurs et ont donc un rôle combinatoire, alors que f, g vont donner le support des p-diviseurs et ainsi jouer un rôle géométrique.

3.4 Groupes d'automorphismes des variétés de Koras-Russell

Les groupes d'automorphismes des variétés de Koras-Russell de première espèce ont été étudiés par Moser-Jauslin dans [M-J], on rappelle ici le résultat :

Théorème 3.4.1. *Soit $X = \{x+x^dy+z^{\alpha_2}+t^{\alpha_3} = 0\}$ une variété de Koras-Russell de première espèce alors le groupe d'automorphisme de X est donné par :*

$$Aut(X) \simeq \mathcal{A}_1 \rtimes \mathbb{G}_m,$$

où $\mathcal{A}_1 := \{\varphi \in Aut(\mathbb{C}[x,z,t]) \mid \varphi(x) = x, \varphi \equiv id \ mod(x) \ et \ \varphi(I) \subset (I)\}$ avec $I = (x + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3}, x^d)$.

La même approche permet de déterminer les groupes d'automorphismes des variétés de Koras-Russell de seconde espèce : l'idée générale est que l'action de $\mathbb{G}_m$ est connue et que les actions de groupes additifs $\mathbb{G}_a$ sont elles aussi connues en terme de dérivations localement nilpotentes (voir [Fr]). Ici l'ensemble $LND(X)$ des dérivations localement nilpotentes de l'anneau de coordonnées de X est de la forme $\mathbb{C}[x,z]\partial$ où ∂ est la dérivation irréductible donnée par :

$$\partial := P_t\frac{\partial}{\partial y} - P_y\frac{\partial}{\partial t},$$

avec $P(x,y,z,t) = x+y(x^d+z^{\alpha_2})^l+t^{\alpha_3}$ et ses deux dérivées partielles $P_t := \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_3 t^{\alpha_3 - 1}$ et $P_y := \frac{\partial P}{\partial y} = (x^d+z^{\alpha_2})^l$. On a alors :

Théorème 3.4.2. *Soit $X = \{x + y(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\}$ une variété de Koras-Russell de seconde espèce. Alors le groupe d'automorphisme de X est donné par :*

$$Aut(X) \simeq \mathcal{A} \rtimes \mathbb{G}_m,$$

où $\mathcal{A} := \{\varphi \in Aut_{\mathbb{C}[x,z]}(\mathbb{C}[x,z,t]) \mid \varphi(t) = t + (x^d + z^{\alpha_2})^l p(x,z) \ \mid p \in \mathbb{C}[x,z]\}$.

Démonstration. X est donné par l'équation d'une hypersurface dans $\mathbb{A}^4$, $X = \{x+y(x^d+z^{\alpha_2})^l+t^{\alpha_3} = 0\}$ avec $d \geq 2$, $\mathrm{pgcd}(dl, \alpha_3) = \mathrm{pgcd}(d, \alpha_2) = \mathrm{pgcd}(\alpha_2, \alpha_3) = 1$.

L'image de la variable y par un automorphisme de X est uniquement déterminée par celle des autres variables en réécrivant $y = \frac{-(x+t^{\alpha_3})}{(x^d+z^{\alpha_2})^l}$ à l'aide de l'équation de X.

1) On pose $f := (x^d + z^{\alpha_2})^l$, on montre alors que tout automorphisme φ de X induit un automorphisme $\hat{\varphi}$ de $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z])$ qui préserve l'idéal (f).

L'existence d'un tel automorphisme provient du fait que d'après [Ka-ML1, Théorème 8.4] :

$$ML(X) = \bigcap_{\partial \in LND(\mathbb{C}[X])} \mathbb{C}[X]^{\partial} = \mathbb{C}[x,z],$$

où l'ensemble $LND(\mathbb{C}[X])$ désigne l'ensemble des dérivations localement nilpotentes et que cet invariant est préservé par tout automorphisme de X. Pour montrer que l'on préserve la courbe cuspidale engendrée par (f), on regarde l'image inverse de la projection suivante :

$$\Pi : X \to \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z]).$$

Soit $(x_0, z_0) \in \mathbb{A}^2$ on pose $f_0 := (x_0^d + z_0^{\alpha_2})^l$, on décompose en trois cas :

$$\Pi^{-1}(x_0, z_0) \simeq \begin{cases} \mathbb{A}^1 & si\ f_0 \neq 0 \\ \mathbb{A}^1 & si\ f_0 = 0\ et\ x = 0 \\ \alpha_3\ copies\ de\ \mathbb{A}^1 & si\ f_0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi la courbe cuspidale doit être envoyée sur elle même par $\hat{\varphi}$ pour préserver cette fibration, il existe donc $\lambda_{\hat{\varphi}} \in \mathbb{G}_m$ tel que $\hat{\varphi}(f) = \lambda_{\hat{\varphi}} f$.

b) On montre que modulo, un élément de $\mathbb{A}^1$ non nul, $\hat{\varphi}$ est l'identité sur $\mathbb{A}^2$.

On pose $\mu_{\hat{\varphi}}$ tel que $(\mu_{\hat{\varphi}})^{d\alpha_2} = \lambda_{\hat{\varphi}}$. Si on considère la surface de Riemann ouverte S définie par $\{x^d + z^{\alpha_2} + 1 = 0\}$ et $\bar{S}$ sa compactification, alors on a $\bar{S} \setminus S$ est réduit à un point p. De plus $Aut_p(\bar{S})$ l'ensemble des automorphismes de $\bar{S}$ qui fixe p est isomorphe au groupe $Aut(S)$, ce groupe est d'ordre fini.

On a alors $\hat{\varphi}(f) = (\mu_{\hat{\varphi}})^{d\alpha_2} f$ et $\hat{\varphi}(f+1) = (\mu_{\hat{\varphi}})^{d\alpha_2} \left(f + \frac{1}{(\mu_{\hat{\varphi}})^{d\alpha_2}} \right)$.

Soit ψ_μ l'automorphisme de $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,z])$ qui préserve l'idéal (f) tel que $\psi_\mu(x) = \frac{x}{\mu^{\alpha_2}}$ et $\psi_\mu(z) = \frac{z}{\mu^d}$. Alors clairement $\psi_\mu \circ \hat{\varphi}$ est un automorphisme de S.

Donc pour tout $\hat{\varphi}$, il existe $\mu \in \mathbb{G}_m$ tel que $\psi_\mu \circ \hat{\varphi}$ soit l'identité sur S. On peut donc supposer que $\hat{\varphi}$ est l'identité modulo un élément de $\mathbb{A}^1$ non nul.

2) Il faut à présent déterminer l'image de la variable t par un automorphisme φ de X.

On va montrer qu'il existe $c \in \mathbb{A}^1$ non nul et $h \in \mathbb{C}[x,z]$ tel que $\varphi(t) = ct + h(x,z)$.

On considère pour cela la dérivation ∂ localement nilpotente et irréductible sur X définie en préambule de ce Théorème.

On a bien $\partial(x) = 0$, $\partial(z) = 0$, $\partial(t) = -P_y = -(x^d + z^{\alpha_2})^l \in ker(\partial)$ et $\partial(y) = P_t = \alpha_3 t^{\alpha_3 - 1} \in ker(\partial^{\alpha_3})$. Ainsi $LND(\mathbb{C}[X]) \simeq \mathbb{C}[x,z]\partial$

Soit $\partial_0 := \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi$ alors ∂_0 est une dérivation localement nilpotente irréductible car ∂ l'est. Ainsi il existe $c \in \mathbb{A}^1$ non nul tel que $\partial_0 = -c\partial$. Donc en utilisant que $\varphi(f) = f$ où $f = (x^d + z^{\alpha_2})^l$ on a :

$$\begin{aligned} \partial_0(t) = \varphi^{-1} \circ \partial \circ \varphi(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi \circ (-c\partial(t)) = \partial \circ \varphi(t) \\ &\Leftrightarrow \quad c\varphi(f) = \partial \circ \varphi(t) \\ &\Leftrightarrow \quad cf = \partial \circ \varphi(t) \end{aligned}$$

ce qui donne $\partial \circ \varphi(t) = \partial(ct)$ et donc $\varphi(t) - ct \in ker(\partial) = \mathbb{C}[x,z]$. Ainsi $\varphi(t) = ct + h(x,z)$ et les automorphismes de $\mathbb{C}[X]$ préservent $\mathbb{C}[x,z,t]$.

3) Si on considère $I = (f, x + t^{\alpha_3})$ idéal dans $\mathbb{C}[x,z,t]$ et $J = (f)$ idéal dans $\mathbb{C}[X]$ alors $I = J \cap \mathbb{C}[x,z,t]$

En effet si on considère $H \in \mathbb{C}[X]$ alors h s'écrit de manière unique $H = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,z,t)y^i$ avec pour $i = 1, \ldots, n$ f qui ne divise pas a_i car $y = \frac{-(x+t^{\alpha_3})}{f}$.

Ce qui implique

$$fH = fa_0 + fya_1 + \ldots + fy^n a_n = fa_0 - (x + t^{\alpha_3})(a_1 + ya_2 + \ldots y^{n-1}a_n),$$

et donc $fh \in (f, x + t^{\alpha_3})$.

Or f et x sont préservés par l'action d'un automorphisme φ de X donc $\varphi(t) = ct + h(x,z)$ avec c une racine α_3-ième de l'unité et $h(x,z)$ dans l'idéal engendré par f dans $\mathbb{C}[x,z]$.

$\square$

3.5 Espaces affines exotiques avec $\mathbb{G}_m$-actions

Le but de cette section est de généraliser la construction des variétés de Koras-Russell X obtenues précédemment par recouvrement bi-cyclique de $\mathbb{A}^3$.

On rappelle que l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X//\mu_{\alpha_3} \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dr] & & X//\mu_{\alpha_2} \simeq \mathbb{A}^3 \arrow[dl] \\
 & X//(\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}) \simeq \mathbb{A}^3 &
\end{tikzcd}$$

Ce qui correspond en terme de présentation A-H à :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}(Y,\mathcal{D}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{S}(Y,\mathcal{D})//\mu_{\alpha_3} \simeq \mathbb{S}(Y,\alpha_3\mathcal{D}) \arrow[dr] & & \mathbb{S}(Y,\mathcal{D})//\mu_{\alpha_2} \simeq \mathbb{S}(Y,\alpha_2\mathcal{D}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{S}(Y,\mathcal{D})//(\mu_{\alpha_2} \times \mu_{\alpha_3}) \simeq \mathbb{S}(Y,\alpha_2\alpha_3\mathcal{D}) &
\end{tikzcd}$$

Or α_2 et α_3 étant premiers entre eux, il existe $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $a_1\alpha_2+a_2\alpha_3 = 1$ ainsi en multipliant par $\mathcal{D}$, on obtient $a_1\alpha_2\mathcal{D} + a_2\alpha_3\mathcal{D} = \mathcal{D}$ ainsi si on peut calculer la présentation en terme de p-diviseur de $X//\mu_{\alpha_3}$ et de $X//\mu_{\alpha_2}$ on a totalement déterminé la présentation de X. C'est ce qui a été effectué dans la section précédente. Dans le cas d'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ les p-diviseurs sont réduits à des intervalles et bien que les p-diviseurs ne forment que un semi-groupe si on les munis de la somme de Minkowski, ce semi-groupe est régulier pour notre cas et donc $\mathcal{D}$ est bien totalement déterminé.

3.5.1 Construction multicyclique générale

On veut maintenant généraliser cette construction en dimension quelconque. Pour cela, on considère X' une variété affine lisse, contractile équipée d'une action effective de $\mathbb{G}_m$. On considère une suite de polynômes dans $\mathcal{O}(X')$ réguliers et semi-invariants q_i, $i = 1, \ldots, k$ de poids respectifs $d_1, \ldots, d_k$ tous positifs et une suite d'entiers $n_1, \ldots, n_k$ positifs tel que $\mathrm{pgcd}(d_i, n_i) = \mathrm{pgcd}(n_i, n_j) = 1$ pour tout $i, j = 1, \ldots, k$

On pose alors :

$$X = \{u_i^{n_i} = q_i(x), i = 1, \ldots, k\} \subset X \times \mathbb{A}^k = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X][u_1, \ldots, u_k]),$$

le recouvrement multicyclique de X' d'ordre n_i le long du diviseur $\{q_i(x) = 0\}$ pour $i = 1, \ldots, k$.

X est alors munie d'une action du groupe cyclique $\mu_{n_1} \times \ldots \times \mu_{n_k}$ et si l'on note $\hat{\mu_{n_i}} := \mu_{n_1} \times \ldots \times \mu_{n_{i-1}} \times \mu_{n_{i+1}} \times \ldots \times \mu_{n_k}$, on obtient alors une tour de variétés :

$$\begin{tikzcd} X' & X//\hat{\mu_{n_1}} \arrow[l] & \arrow[l] \cdots\cdots & X//\mu_{n_k} \arrow[l] & X \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

Il faut de plus remarquer que les quotients peuvent être effectués dans un ordre quelconque, ce qui donne le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & X//\mu_{n_1} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dotted] & & X//\mu_{n_k} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X//(\mu_{n_1} \times \mu_{n_2}) \arrow[dd] \arrow[rr, dash, dotted] & & X//(\mu_{n_1} \times \mu_{n_k}) \arrow[dd] \arrow[rr, dash, dotted] & & X//(\mu_{n_k} \times \mu_{n_{k-1}}) \arrow[dd] \\
 & \ldots & & \ldots & \\
X//\hat{\mu}_k \arrow[drr] \arrow[rr, dash, dotted] & & X//\hat{\mu}_i \arrow[d] \arrow[rr, dash, dotted] & & X//\hat{\mu}_1 \arrow[dll] \\
 & & X' & &
\end{tikzcd}$$

Avec les notations précédentes on a les résultats suivants :

Proposition 3.5.1. *i) Pour tout $i = 1, \dots, k$ les variétés $X//\hat{\mu}_i$ sont lisses si et seulement si $\{q_i(x) = 0\} \subset X'$ est un diviseur lisse.*

ii) La variété X est lisse si et seulement si $D = \bigcup_{i=1}^{k} \{q_i(x) = 0\}$ est un diviseur à croisements normaux tel que pour tout $i = 1, \dots, k$,$\{q_i(x) = 0\} \subset X'$ est un diviseur lisse.

Démonstration. Pour le premier énoncé il suffit de calculer le Jacobien, on obtient que $X//\hat{\mu}_i$ est lisse si et seulement si le gradient de $\{q_i(x) - u_i^{n_i} = 0\}$ est non nul pour tout $(x \times u_i) \in X' \times \mathbb{A}^1$ ce qui est équivalent à $\{q_i(x) = 0\} \subset X'$ est lisse.

Pour le second énoncé, clairement, les diviseurs doivent être lisses pour les mêmes raisons que précédemment. De plus le fait d'être lisse étant une propriété locale et étant donné que l'on raisonne avec pour corps de base $\mathbb{C}$, on va se ramener a des arguments analytiques locaux. On va traiter le cas d'un diviseur D composé de deux composantes irréductibles D_1 et D_2 et par induction on aura le résultat général. Localement les trois cas possibles sont :

i) $D_1 = \{x_1 = 0\}$ et $D_2 = \{x_2 = 0\}$, ce qui revient à avoir localement une intersection transverse, alors, clairement, le recouvrement cyclique d'ordre n_1 le long de D_1 sur X' donnée par $p : X \to X'$ implique $p^*(D_2)$ lisse, D_2 ne change pas.

ii) $D_1 = \{x_1 = 0\}$ et $D_2 = \{f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ tel que l'intersection soit non transverse alors le recouvrement cyclique d'ordre n_1 le long de D_1 sur X' donnée par $p : X \to X'$ implique $p * (D_2) = \{f(x_1^{n_1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ à l'aide du critère Jacobien on trouve que $p^*(D_2)$ est singulier si et seulement si $\frac{\partial}{\partial x_i} g(0, \dots, 0) = 0$ pour tout $i \geq 1$ ce qui est équivalent à $\frac{\partial}{\partial x_j} f(0, \dots, 0) = 0$ pour tout $j > 1$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} f(0, \dots, 0) \neq 0$ car D_2 est lisse à l'intersection avec D_1. Donc $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + H(x_1, \dots, x_n)$ où H n'admet que des éléments de degré au moins 2. On regarde alors l'intersection $D_1 \cap D_2$ donnée par $\{H(0, \dots, x_n) = 0\}$ qui n'est pas lisse on arrive a une contradiction. □

Si on se place sous les hypothèses de la proposition précédentes on a alors que les variétés $X//\hat{\mu}_i$ pour $i = 1, \dots, k$ sont des variétés lisses munies d'une action de $\mathbb{G}_m$, on peut donc écrire $X'//\hat{\mu}_i = \mathbb{S}(Y_i, \mathcal{D}_i)$ et de même pour X qu'on notera $X' = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$.

De plus $\mathrm{pgcd}(d_i, n_i) = \mathrm{pgcd}(n_i, n_j) = 1$ pour tout $i, j = 1, \dots, k$ ce qui implique que à chaque recouvrement, l'action du groupe cyclique se factorise par celle de $\mathbb{G}_m$. On peut alors appliquer le Théorème 2.2.4. Ce qui donne alors le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{S}(Y,\mathcal{D}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \mathbb{S}(Y,n_1\mathcal{D}) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \simeq \mathbb{S}(Y,n_k\mathcal{D}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{S}(Y,n_1n_2\mathcal{D}) \arrow[dd] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathbb{S}(Y,n_1n_k\mathcal{D}) \arrow[dd] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathbb{S}(Y,n_kn_{k-1}\mathcal{D}') \arrow[dd] \\
 & \cdots & & \cdots & \\
\mathbb{S}(Y,(\prod_{p=1}^{k-1} n_p)\mathcal{D}) \arrow[drr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathbb{S}(Y,(\prod_{p=1,p\neq i}^{k} n_p)\mathcal{D}) \arrow[d] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathbb{S}(Y,(\prod_{p=2}^{k} n_p)\mathcal{D}') \arrow[dll] \\
 & & \mathbb{S}(Y,(\prod_{p=1}^{k} n_p)\mathcal{D}) & &
\end{tikzcd}
$$

De surcroit l'ensemble $\{\prod_{p=1,p\neq i}^{k} n_p \mid p = 1,\ldots,k\}$ constitue un ensemble d'entiers premiers entre eux, il existe donc une suite de k entier $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sum_{i=1}^{k}(a_i \prod_{p=1,p\neq i}^{k} n_p) = 1$ ceci donne :

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i \prod_{p=1,p\neq i}^{k} n_p)\mathcal{D} = \mathcal{D}.$$

Ainsi, calculer indépendamment les k recouvrements cycliques d'ordre n_i le long des diviseurs $\{q_i(x) = 0\}$ pour $i = 1,\ldots,k$ détermine totalement X.

On va à présent pour certains cas particuliers caractériser la propriété d'être un espace exotique avec action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. Pour cela on commencera par la propriété d'être lisse pour une $\mathbb{G}_m$-variété construite comme suit.

Soit $Y = \{p(u_1,\ldots,u_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u_1,\ldots,u_n])$, une hypersurface lisse passant par l'origine, et $\pi : \tilde{Y} \to Y$ l'éclatement de Y le long du sous-schéma d'idéal $(u_1,\ldots,u_n)$.

De plus on considère $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \frac{a_i}{n_i} \right\} \tilde{H}_i + \left[0, \frac{1}{\prod_{p=1}^{k} n_p} \right] E$ avec $\tilde{Q}_i$ transformé strict dans $\tilde{Y}$ de $Q_i = \{q_i(u_1, \ldots, u_n) = 0\} \subset \tilde{Y}$ tel que $\mathrm{pgcd}(n_i, n_j) = 1$ et $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ vérifient $\sum_{i=1}^{k} (a_i \prod_{p=1, p \neq i}^{k} n_p) = 1$.

Théorème 3.5.2. *La variété $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \mathcal{D})$ est une variété lisse si et seulement si pour $i = 1, \ldots, k$, $Q_i \in Y$ est un diviseur lisse et irréductible tel que $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ soit à croisements normaux dans Y.*

Démonstration. D'après la proposition 1.4.10 et de la construction par recouvrement cyclique précédente, la variété $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \mathcal{D})$ correspond à la modification hyperbolique de la variété Y suivie du recouvrement multicyclique d'ordre n_i le long du diviseur déterminé par l'équation $\{y^{-1} q_i(x_1 y, ..., x_n y)\} \subset Y \times \mathbb{A}^1$. Ces diviseurs sont semi-invariants de poids 1 par construction. De plus par hypothèse on a $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} (a_i \prod_{p=1, p \neq i}^{k} n_p) = 1$.

$$\sum_{i=1}^{k} \left[0, \frac{a_i}{n_i} \right] = \left[0, \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{n_i} \right] = \left[0, \frac{\sum_{i=1}^{k} (a_i \prod_{p=1, p \neq i}^{k} n_p)}{\prod_{p=1}^{k} n_p} \right] = \left[0, \frac{1}{\prod_{p=1}^{k} n_p} \right]$$

Or l'union des modifications hyperboliques des hypersurfaces Q_i est un diviseur à croisements normaux si et seulement si Q l'était donc d'après la proposition 3.5.1 on obtient le résultat voulu. □

On peut exactement de la même manière réinterpréter le Théorème 3.1.11 dans le cas particulier d'une hypersurface lisse de $\mathbb{A}^n$ obtenue par modification hyperbolique. Cela implique en terme de p-diviseur et après utilisation de [Z, remarque 6.2] :

Théorème 3.5.3. *Soit $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \mathcal{D})$ respectant les hypothèses du Théorème 3.5.2 et si de plus le groupe fondamental du complémentaire $\pi_1(Y \setminus \cup_1^k Q_i)$ est un groupe abélien. Alors $\mathbb{S}(\tilde{Y}, \mathcal{D})$ est une variété lisse et contractile.*

On remarque que les variétés ainsi obtenues peuvent s'écrire comme des hypersurfaces de $\mathbb{A}^{n+2}$ si $k-1$ des hypersurfaces H_i sont rectifiables en même temps. Ce qui était bien le cas par le théorème d'épimorphisme pour les variétés de Koras-Russell où l'on avait comme diviseur dans $\mathbb{A}^2$ deux courbes chacune isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

Exemple 3.5.4. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v,w])$ et $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^3, \mathcal{D})$ où $\mathcal{D} = \left\{\frac{-1}{2}\right\} D_1 + \left\{\frac{1}{3}\right\} D_2 + \left\{\frac{1}{5}\right\} D_3 + \left[0, \frac{1}{30}\right] E$.

Avec E le diviseur exceptionnel de l'éclatement, D_1 le transformé strict de la surface $\{u = 0\}$, D_2 la transformé stricte de la surface $\{w = 0\}$et D_3 le transformé strict de la surface $\{p(v) + u + w = 0\}$ avec $p(v)$ un polynôme régulier et tel que $p(0) = 0$.

$\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^3, \mathcal{D})$ est alors isomorphe de manière équivariante à l'hypersurface X lisse et contractile de $\mathbb{A}^5 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t,\theta])$ donnée par l'équation $\{p(xy)y^{-1} + z^2 + t^3 + \theta^5 = 0\}$. X est munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^5$suivante : $\lambda \cdot (x,y,z,t,\theta) = (\lambda^{30}x, \lambda^{-30}y, \lambda^{15}z, \lambda^{10}t, \lambda^6\theta)$.

Cette variété est un espace exotique ; ceci est démontré dans [Ka-ML2, proposition 11.1].

Exemple 3.5.5. On considère $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u,v,w])$ et $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^3, \mathcal{D})$ où $\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{2}\right\} D_1 + \left\{-\frac{1}{3}\right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{6}\right] E$.

Avec E le diviseur exceptionnel de l'éclatement, D_1 le transformé strict d'une surface isomorphe à un plan et définie par $\{p(u,v,w) = 0\}$, D_2 le transformé strict d'une surface isomorphe à un plan et définie par $\{q(u,v,w) = 0\}$ tel que les deux surfaces contiennent l'origine et s'intersectent normalement.

$\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^3, \mathcal{D})$ est alors isomorphe de manière équivariante à la sous-variété de codimension deux X lisse et contractile de $\mathbb{A}^6 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t,\theta,\iota])$ définie par l'idéal $(p(xy,zy,ty)y^{-1} + \theta^2, q(xy,zy,ty)y^{-1} + \iota^3)$. X est munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^6$suivante : $\lambda \cdot (x,y,z,t,\theta,\iota) = (\lambda^6x, \lambda^{-6}y, \lambda^6z, \lambda^6t, \lambda^3\theta, \lambda^2\iota)$.

Chapitre 4

Variétés G-uniformément rationnelles

4.1 Définitions et propriétés

Une variété X (pas nécessairement affine) est dite *uniformément rationnelle* si tout point de cette variété admet un voisinage ouvert, pour la topologie de Zariski, qui est isomorphe à un ouvert de l'espace affine. Cette propriété a été étudiée en premier dans un article de Gromov [Gr, p.885], dans lequel il pose la question suivante :

Soit X une variété lisse et rationnelle de dimension n, est-il vrai que pour chaque point x dans X il existe un ouvert de Zariski U qui contient x et qui est isomorphe a un ouvert de $\mathbb{A}^n$?

La question est toujours ouverte mais certains articles [Bod-Hau-S-Vi] et [Bo-Bö] ont donné des éléments de réponse.

On va donner une définition équivariante analogue : on dira qu'une G-variété est *G-linéairement uniformément rationnelle* si pour tout point x dans X, il existe un voisinage ouvert G-stable U_x de x, une représentation de G donnée par $(\mathbb{A}^n, G \to GL_n)$ et $V \subset \mathbb{A}^n$ un ouvert stable par G tel que U_x soit isomorphe de manière équivariante à V. Une variété G-uniformément rationnelle est donc clairement uniformément rationnelle. On montrera que pour cette propriété, dans le cas ou $G \simeq \mathbb{T}$, il existe un critère donné par les présentations A-H de X et de $\mathbb{A}^n$. L'intérêt d'utiliser la présentation A-H est de pouvoir faire des constructions équivariantes en effectuant de la géométrie dans le quotient A-H Y de X. On a ainsi diminué la dimension des variétés considérées en passant de $\dim(X)$ à $\dim(Y) = \dim(X) - \dim(\mathbb{T})$.

Exemple 4.1.1. $\mathbb{A}^n$ et $\mathbb{P}^n$ sont des variétés uniformément rationnelles. De même, les ouverts et les produits de variétés uniformément rationnelles sont eux aussi des variétés uniformément rationnelles.

On commence par considérer, pour commencer, le cas en dimension 1. Les uniques variétés lisses rationnelles sont $\mathbb{P}^1$ et des ouverts de $\mathbb{P}^1$, on a donc une équivalence, une courbe qui est lisse et rationnelle est uniformément rationnelle.

Considérons a présent le cas en dimension 2,

Proposition 4.1.2. *Toute surface lisse et rationnelle est uniformément rationnelle.*

Démonstration. On considère donc X une surface lisse et rationnelle, sans perdre de généralité on peut supposer que X est une variété projective, or les variétés projectives lisses et rationnelles sont classifiées, elles sont obtenues à partir d'un nombre fini d'éclatements sur une surface minimale, c'est-à-dire $\mathbb{P}^2$ ou une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_r = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r))$ pour $r \geq 2$.

Mais un éclatement $\pi : \tilde{S} \to S$ d'une de ces surfaces en un point admet deux cartes chacune isomorphe à une copie de $\mathbb{A}^2$, en réitérant le processus pour plusieurs éclatements, on obtient ainsi qu'une surface lisse et rationnelle est uniformément rationnelle. $\square$

Pour les dimensions $n > 2$ on ne possède pas une classification aussi précise comme dans le cas $n = 2$ et donc on ne peut pas généraliser ce résultat. Cependant il a été démontré que l'éclatement le long d'une sous-variété lisse dans une variété uniformément rationnelle est une opération qui permet de rester dans la classe des variétés uniformément rationnelles [Bod-Hau-S-Vi] et [Bo-Bö] :

Proposition 4.1.3. *Soit X une variété uniformément rationnelle et $Y \subset X$ une sous-variété lisse. Alors l'éclatement $\tilde{X}_Y$ est encore uniformément rationnel.*

Démonstration. Voici l'idée de la preuve développé par [Bo-Bö]. On considère $y \in Y$. Par hypothèse, y possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert de l'espace affine. On peut donc supposer que $Y \subset \mathbb{A}^n$ et $\dim(Y) = m \leq n - 2$.

On peut alors considérer une application birationnelle $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ définie en y et tel que l'image de Y soit une hypersurface de $L \simeq \mathbb{A}^{m+1} \subset \mathbb{A}^n$.

Pour cela on considère une décomposition générique de $\mathbb{A}^n = L \bigoplus M$, où $M \simeq \mathbb{A}^{n-m-1}$ et on considère la projection adaptée a notre situation $\pi_M : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{m+1}$ et on a que π_M restreint à Y est un isomorphisme entre un voisinage de y et $\pi_M(Y) \cap U$ pour un certain $U \in L$ ouvert affine.

Y peut être alors donné par les zéros d'un polynôme f en $m + 1$ variable,

$$Y = \{f(x_1, \ldots, x_{m+1}) = 0\} \subset \mathbb{A}^{m+1} \simeq L.$$

L'éclatement est alors donné dans une des cartes par :

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_{n-m-1}) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{n-m-1} \mid x_{m+2} = y_1 f, \ldots x_n = y_{n-m-1} f\},$$

on a alors un isomorphisme entre V et $\mathbb{A}^n$ en considérant la projection sur les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-m-1})$.

Pour les points dont le transformé n'est pas contenu dans la carte donnée par V, il faut alors considérer un automorphisme de $\mathbb{A}^n$ bien choisi qui envoie Y sur Y' et ainsi on réitère la construction pour obtenir une nouvelle carte V' elle aussi isomorphe à $\mathbb{A}^n$ et qui contient le transformé des points non contenus dans V. $\square$

Cela permet ainsi de produire des variétés uniformément rationnelles à partir de variétés qui vérifient déjà cette propriété :

Corollaire 4.1.4. *Les modifications affines de centres lisses et les modifications hyperboliques en un point lisse d'une variété uniformément rationnelle sont aussi des variétés uniformément rationnelles.*

La modification hyperbolique d'une variété X est obtenue comme modification affine du cylindre $X \times \mathbb{A}^1$ qui est uniformément rationnelle si X l'est.

Exemple 4.1.5. On considère $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ qui est une variété uniformément rationnelle, et $I = (f, g)$ tel que la sous-variété de $\mathbb{A}^n$ définie par I soit lisse. Alors la modification affine X' de $\mathbb{A}^n$ le long du diviseur $\{f = 0\}$ et de centre $I = (f, g)$, donné par l'équation :

$$\{g(x_1, \ldots, x_n) - yf(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y]),$$

est une variété uniformément rationnelle.

On sait d'après la proposition 3.2.3 que les variétés de Koras-Russell sont obtenues comme modification affine de l'espace affine $\mathbb{A}^3$, cependant le centre de cette modification est supporté sur une courbe cuspidale contenue dans un plan, et donc c'est une modification affine de centre singulier. Le corollaire précédent ne permet donc pas de conclure pour les variétés de Koras-Russell. On constate donc que cette proposition s'avère être assez restrictive. On va pourtant voir plus tard (Théorème 4.3.5) que certaines de ces variétés sont uniformément rationnelles.

Supposons maintenant que X est une variété lisse et rationnelle mais de plus munie d'une action effective d'un tore, c'est-à-dire, X est une $\mathbb{T}$-variété. On va utiliser la structure induite par l'action pour prouver que la variété est uniformément rationnelle dans certains cas :

Théorème 4.1.6. *Soit X une $\mathbb{T}$-variété lisse et rationnelle alors X est uniformément rationnelle si la complexité de l'action est 0 ou 1.*

Les variétés de complexité 0 sont des variétés toriques, or les variétés toriques sont couvertes par des cartes isomorphes à $\mathbb{A}^k \times (\mathbb{G}_m)^{n-k}$ (voir [Fu, p.29] pour plus de détails). Pour le cas des $\mathbb{T}$-variétés de complexité 1 la preuve est donnée dans [Ke-Kn-Mu-S, Chapitre 4].

Voici une idée de la preuve qui utilise la présentation A-H des $\mathbb{T}$-variétés de complexité 1. Pour la démonstration on utilise le fait que le quotient A-H d'une $\mathbb{T}$-variété de complexité 1 est une courbe lisse et, de plus, si X est rationnelle, la variété Y l'est aussi. Ainsi on se ramène directement à l'étude des $\mathbb{T}$-variétés de complexité 1 ayant pour quotient $\mathbb{P}^1$. Puis on s'intéresse aux diviseurs polyédraux sur $\mathbb{P}^1$ qui vont permettre de se ramener au cas des variétés toriques. On va donc chercher à utiliser la présentation en terme de p-diviseurs des $\mathbb{T}$-variétés pour obtenir des résultats en dimension supérieur à 2.

Dans le cas des variétés de complexité 1, si de plus la variété est complète c'est-à-dire, que pour toute variété Y la projection $X \times Y \to Y$ est un morphisme fermé, alors il a été démontré dans [Ar-Pe-Sü] le théorème suivant :

Théorème 4.1.7. *Toutes les $\mathbb{T}$-variétés de complexité 1, lisses, rationnelles et complètes sont recouvertes par des cartes isomorphes à des espaces affines.*

4.2 Variétés G-uniformément rationnelles

On va maintenant introduire une nouvelle définition adaptée aux G-variétés et expliquer la stratégie pour traiter des cas de $\mathbb{G}_m$-variétés en toute dimension $n > 2$, le cas des dimensions inférieures étant traité par les théorèmes précédents.

4.2.1 Premières définitions

Définition 4.2.1. i) Soit X une G-variété et $x \in X$. On dit que X est *G-linéairement rationnelle* au point x si il existe un voisinage ouvert G-stable U_x de x, une représentation de G donnée par $(\mathbb{A}^n, G \to GL_n)$ et $V \subset \mathbb{A}^n$ un ouvert stable par G tel que U_x soit isomorphe de manière équivariante à V.

ii) Une G-variété qui est G-linéairement rationnelle en tout point est dite *G-linéairement uniformément rationnelle.*

iii) Une variété qui admet un unique point fixe x_0 pour l'action de G sera dite G-linéairement rationnelle pour signifier qu'elle est G-linéairement rationnelle en x_0.

Les variétés qui sont G-linéairement uniformément rationnelles sont clairement uniformément rationnelles.

Définition 4.2.2. i) Soit X une G-variété et $x \in X$. On dit que X est *G-rationnelle* au point x si il existe un voisinage ouvert G-stable U_x de x, une action de G sur $\mathbb{A}^n$ et $V \subset \mathbb{A}^n$ un ouvert stable par G tel que U_x soit isomorphe de manière équivariante à V.

ii) Une G-variété qui est G-rationnelle en tout point est dite *G-uniformément rationnelle.*

iii) Une variété qui admet un unique point fixe x_0 pour l'action de G sera dite G-rationnelle pour signifier qu'elle est G-rationnelle en x_0.

On se focalise sur les actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur des variétés affines lisses. On va donc déterminer la présentation A-H des espaces affines de dimension 2 et 3 munis d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$.

Gutwirth a démontré dans [Gu] que les actions de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^2$ sont linéarisables. Ce résultat peut être illustré en utilisant les p-diviseurs (voir [F-Z2, Corollaire 4.6]).

Proposition 4.2.3. *Soit $\mathbb{A}^2$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ alors $\mathbb{A}^2$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}]D)$ avec $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$.*

Démonstration. Le quotient A-H de $\mathbb{A}^2$ muni d'une action hyperbolique est $\mathbb{A}^1$ puisque $\mathbb{A}^2//\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{A}_1$, c'est l'une des particularités de ce cas, le quotient A-H correspond au quotient catégorique dans la catégorie des variétés affines.

De plus, le cône de récession $\sigma = \{0\}$ car l'action est hyperbolique donc $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{k} [a_i, b_i] D_i$. Or, chaque intervalle non réduit à un singleton correspond à deux orbites dont les clôtures s'intersectent en un point fixe. Pour montrer cela, on calcule $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [a_i, b_i]D_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$, chacune de ces variétés possède un point fixe et par le lemme 2.1.13, on peut les plonger dans $\mathbb{A}^2$. Cependant $\mathbb{A}^2$ muni d'une action hyperbolique ne possède qu'un unique point fixe donc $\mathcal{D}$ est de la forme $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{k-1} q_i D_i + [a, b] D$.

De plus l'anneau des fonctions régulières de $\mathbb{A}^2$ est factoriel ainsi $q_i \in \mathbb{Z}$, pour tout $i = 1, \ldots, k-1$ (voire [F-Z1, Corollaire 4.23]) d'où $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{k-1} D_i + [a, b] D \sim [a, b] D$.

On constate de plus que $\mathbb{S}(\mathbb{A}^1, [a, b]D)$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{A}^2$ et donc lisse si et seulement si $a = \frac{a_1}{a_2}$ et $b = \frac{b_1}{b_2}$ satisfont :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$

$\square$

Le résultat de Gutwirth a été généralisé par Bialynicki-Birula dans [B2] qui a montré le théorème suivant :

Théorème 4.2.4. *Une action effective d'un tore algébrique $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{A}^n$ est linéarisable pour* $\dim(\mathbb{T}) \geq n - 1$.

Ainsi dans le cas des $\mathbb{T}$-variétés de complexité 0 et 1 la propriété d'être $\mathbb{T}$-linéairement uniformément rationnelle est équivalente à la propriété d'être $\mathbb{T}$-uniformément rationnelle puisque les actions sont linéarisables. En complexité 2, on peut donner la présentation générale pour toutes les actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$ à l'aide du théorème suivant.

Théorème 4.2.5. *[Ka-K-ML-R] Toute action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$ est linéarisable.*

Ainsi dans le cas des $\mathbb{G}_m$-variétés de complexité 2, la propriété d'être $\mathbb{T}$-linéairement uniformément rationnelle est équivalente à la propriété d'être $\mathbb{T}$-uniformément rationnelle.

En toute généralité, on considère une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X, Z, Y])$ donné par $\lambda \cdot (X, Y, Z) \to (\lambda^a X, \lambda^b Z, \lambda^{-c} Y)$, avec a, b et c qui sont positifs et de plus premiers entre eux. La présentation en terme de p-diviseur de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ va en découler :

Corollaire 4.2.6. *Soit $\mathbb{A}^3$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$. Alors $\mathbb{A}^3$ est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y,\mathcal{D})$ où Y et $\mathcal{D}$sont comme suit :*

i) Y isomorphe à Z/μ où μ est un groupe cyclique et Z est isomorphe à l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ le long d'un sous-schéma supporté à l'origine.

ii) $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$\mathcal{D} = \{p_1\} \otimes D_1 + \{p_2\} \otimes D_2 + [p_3, p_4] \otimes E,$$

où D_1 , D_2 sont les transformés stricts de droites linéaires dans le même système de coordonnées et E correspond au diviseur exceptionnel de l'éclatement.

Ce corollaire se démontre rapidement de deux manières différentes.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $a = b = c = 1$ traité dans l'exemple 1.3.2.2 puis d'appliquer le Théorème 2.2.4.

On peut aussi le calculer directement dans le cas général en considérant la construction 1.3.2.2 correspondant à $\mathbb{A}^3$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "F"'] & \mathbb{Z}^3 \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $F = {}^t(a, b, -c)$ et $P = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,3} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \end{pmatrix}$ avec $u_{i,j} \geq 0$.

La variété torique engendrée par les vecteurs $\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_{1,3} \\ u_{2,2} \end{pmatrix}$ correspond à l'éclatement à poids de $\mathbb{A}^2$ le long d'un sous-schéma supporté à l'origine, suivie du quotient par un groupe cyclique.

□

Pour $n \geq 4$ on n'a pas un résultat analogue au Théorème 4.2.5. Autrement dit on ne sait pas si chaque action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^n$ est linéarisable.

4.2.2 Le cas des actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur des variétés lisses et rationnelles

On va maintenant développer une stratégie pour décider si une variété X de dimension quelconque munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ avec un point fixe x_0 est $\mathbb{G}_m$-rationnelle. Le but est de trouver le bon ouvert $X' \subset X$ qui soit $\mathbb{G}_m$-invariant et qui contient le point fixe. On va exprimer celui-ci comme le complémentaire des zéros d'une fonction régulière $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ semi-invariante par l'action de $\mathbb{G}_m$ ainsi $X' = X \setminus V(f)$. De plus, cette stratégie permet de construire un isomorphisme explicite entre cet ouvert X' et un ouvert de $\mathbb{A}^n$.

Proposition 4.2.7. *Soit X une variété affine, lisse et munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y(X), \mathcal{D}_2)$. Alors déterminer si X est $\mathbb{G}_m$-rationnelle est équivalent a déterminer si il existe $\mathbb{A}^n$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y(\mathbb{A}^n), \mathcal{D}_1)$, et une application birationnelle $\phi : Y(\mathbb{A}^n) \to Y(X)$ tel que $\phi^*(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_1$.*

La fin de cette section est dévolue à prouver ce résultat. Dans un premier temps on a que si $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une fonction semi-invariante de poids u tel que $f(x_0) \neq 0$ alors f est invariant par $\mathbb{G}_m$. On a ainsi, $\lambda \cdot f(x_0) = \lambda^u f(x_0) = f(\lambda^{-1} \cdot x_0) = f(x_0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_m$, de plus $f(x_0) \neq 0$. Ceci est donc possible si et seulement si $u = 0$ et donc si f est invariant par l'action de $\mathbb{G}_m$.

Deuxièmement X admet une présentation en terme de p-diviseur, ainsi on peut noter $X = \mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$ avec Y semi-projective au-dessus de $Y_0 = X//\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X]^{\mathbb{G}_m})$. On a donc que si f est une fonction régulière sur X vérifiant les propriétés du lemme précédent, alors $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^{\mathbb{G}_m} = \Gamma(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0}) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, tel que $V(f) \subset Y_0$ n'intersecte pas le sous-schéma éclaté dans Y_0. On notera par $Y' = Y \setminus V(f)$ l'ouvert ainsi obtenu.

On veut étudier des variétés lisses et rationnelles munies d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donc le Théorème 1.4.5 s'applique et on peut résumer la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X' = X \setminus V(f) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "//\mathbb{G}_m"'] & X \arrow[d, "//\mathbb{G}_m"'] \\
Y_0' = Y_0 \setminus V(f) \arrow[r, hook] & Y_0 \\
Y' = Y \setminus V(f) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[u, "\pi_{|Y'}"'] & Y = Bl_I(Y_o) \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

On connait la présentation en terme de p-diviseur de X. Elle est donnée par $\mathbb{S}(Y, \mathcal{D})$, et de celle-ci on va obtenir celle de X' a l'aide du lemme 2.1.13. On trouve ainsi que X' est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(Y', i^*(\mathcal{D}))$.

Pour démontrer que X est $\mathbb{G}_m$-rationnelle on cherche X', un ouvert contenant le pont fixe x_0, isomorphe de manière $\mathbb{G}_m$-équivariante à un ouvert de $\mathbb{A}^n$, c'est-à-dire, X' doit satisfaire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n \arrow[d, "//\mathbb{G}_m"'] & X' \arrow[l, hook', "j'"'] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "//\mathbb{G}_m"'] & X \arrow[d, "//\mathbb{G}_m"'] \\
Y_0(\mathbb{A}^n) & Y_0' \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & Y_0(X) \\
Y(\mathbb{A}^n) \arrow[u] & Y' \arrow[l, hook', "i'"'] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[u] & Y(X) \arrow[u]
\end{tikzcd} .$$

D'un coté on a $\mathbb{A}^n$ muni d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ encodé par $(Y(\mathbb{A}^n), \mathcal{D}_1)$, et de l'autre coté X munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ encodée par $(Y(X), \mathcal{D}_2)$. En utilisant le lemme 2.1.13 et la proposition ([A-H, Corollary 8.12.]), déterminer si une variété X est $\mathbb{G}_m$-rationnelle est équivalent à une question naturelle de géométrie birationnelle de dimension $n-1$:

Existe-il une application birationnelle $\phi : Y(\mathbb{A}^n) \to Y(X)$ tel que $\phi^*(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_1$?

Dans le cas particulier des $\mathbb{G}_m$-variétés de dimension 3, on utilise donc des arguments de géométrie birationnelle en dimension 2. On a de plus classifié les actions hyperboliques de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^3$ (Corollaire 4.2.6) en terme de p-diviseur. Ainsi après résolution des singularité cyclique grâce au Théorème 2.2.4, on va pouvoir se ramener à la rectification de courbes ou d'une paire de courbes par des applications birationnelles de $\mathbb{A}^2$.

4.3 Applications

Dans cette section on prouve que certaines hypersurfaces de $\mathbb{A}^4$ sont $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles en particulier, toutes les variétés de Koras-Russell du premier type sont $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles. De la même manière on montre qu'il existe des variétés de Koras-Russell qui ne sont pas $\mathbb{G}_m$-rationnelles et donc pas $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelles. Pour effectuer ces démonstrations, on va définir un invariant birationnel, appelé dimension de Kumar-Murthy et on calculera celui-ci pour certaines variétés.

Définition 4.3.1.
i) Soient X et Y deux variétés algébriques, une application $\varphi : X \dashrightarrow Y$ est dite *birationnelle* si elle induit un isomorphisme entre un ouvert non vide de X et un ouvert non vide de Y.
ii) Une variété X est dite *rationnelle* si il existe une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$.

iii) Soit D_1 un diviseur de Cartier sur une variété X_1 et soit D_2 un diviseur de Cartier sur une variété X_2 alors (X_1, D_1) et (X_2, D_2) sont *birationnellement équivalents* (ou Cremona équivalents) si il existe une application birationnelle $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ tel que $\varphi^*(D_2) = D_1$.

iv) Soit X une variété rationnelle et un diviseur $D = \sum_{i=1}^{k} H_i$ où H_i correspond à une hypersurface rationnelle pour tout $i = 1, \dots, k$. On dit que D est *birationnellement rectifiable* si il existe une application birationnelle $\varphi : \mathbb{P}^N \dashrightarrow X$ tel que le domaine de définition de φ^{-1} intersecte D et $\varphi^*(D) = \{u_1 \dots u_k = 0\} \subset \mathbb{P}^N_{[u_1:\dots:u_{N+1}]}$ avec $k \leq n$.

v) Soit X une surface et soit $D = \sum_{i=1}^{k} D_i$ un diviseur sur X alors D est dit à croisements normaux simples (snc) si pour tout i, le diviseur irréductible D_i est lisse et que les D_i s'intersectent uniquement deux à deux et de manière transverse.

Exemple 4.3.2. Dans le cas des surfaces, soit $D = C_1 + C_2$ un diviseur sur une surface rationnelle S avec C_i une courbe rationnelle pour $i = 1, 2$. Alors D est birationnellement rectifiable si il existe une application birationnelle $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow S$ tel que $\varphi^*(D) = \{uv = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{[u:v:w]}$.

4.3.1 Famille de variétés $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles.

On va construire des paires de courbes dans $\mathbb{A}^2$ qui seront birationnellement équivalentes aux axes de coordonnées. Ainsi en utilisant le Théorème 3.5.2, on obtiendra une famille de variétés $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelles parmi lesquelles on va obtenir les variétés de Koras-Russell de première espèce et certains recouvrement cycliques de celles-ci.

Théorème 4.3.3. *Soit X l'hypersurface définie par l'équation*

$$\{y^d z^{\alpha_2} + y t^{\alpha_3} + p(xy) = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]) \text{ si } p(0) \neq 0,$$

ou par

$$\{y^{d-1} z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} + p(xy)/y = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]) \text{ si } p(0) = 0.$$

On munit X d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donnée par $\lambda \cdot (x, y, z, t) = (\lambda^{\alpha_2\alpha_3} x, \lambda^{-\alpha_2\alpha_3} y, \lambda^{d\alpha_3} z, \lambda^{\alpha_2} t)$ où d et α_3 sont premiers entre eux, de mêmeα_2 et α_3 sont premiers entre eux.

1) Alors X est isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)}, \mathcal{D})$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{a}{\alpha_2}\right\} D_1 + \left\{\frac{b}{\alpha_3}\right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\right] E$$

où E est le diviseur exceptionnel de $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)} \to \mathbb{A}^2$, D_1 et D_2 sont les transformés stricts des courbes $L_1 = \{u = 0\}$ et $L_2 = \{u + p(v) = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2$ respectivement, et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sont choisis tel que $ad\alpha_3 + b\alpha_2 = 1$.

2) X est lisse et admet l'origine comme point fixe si et seulement si $D = L_1+L_2$ dans $\mathbb{A}^2$ est un diviseur à croisements normaux et L_2 contient par l'origine (ce qui revient à demander $p(0) = 0$ et p est à racines simples).

3) Sous ces conditions,X est $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnelle au point $(0, 0, 0, 0)$.

Démonstration. 1) On commence par déterminer la présentation A-H de la variété X en utilisant 1.3.2.1 et 1.3.2.2. On considère pour cela la suite exacte suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "F"'] & \mathbb{Z}^4 \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Où $F = {}^t(\alpha_2\alpha_3, -\alpha_2\alpha_3, d\alpha_3, \alpha_2)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ et $s = (0, 0, a, b)$ choisis tel que $ad\alpha_3 + b\alpha_2 = 1$.

On considère l'éventail engendré par les rayons $\{v_i\}_{i=1,..,4}$ où v_i est le premier vecteur à coefficient entier du cône unidimensionnel engendré par le i-ème vecteur colonne de P. Cet éventail correspond à l'éclatement de $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v, w])$ le long du sous-schéma d'idéal $I = (u, v^d, v^{d-1}w, \ldots, vw^{d-1}, w^d)$, en tant que variété torique.

La variété Y correspond donc au transformé strict par $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3_I \to \mathbb{A}^3 \simeq \mathbb{A}^4//\mathbb{C}^*$ de $\{u + w + p(v) = 0\} \subset \mathbb{A}^3$, ce qui donne $Y \simeq \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)}$.

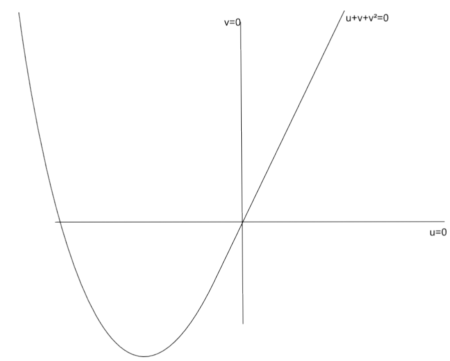
Le p-diviseur $\mathcal{D}$ quand à lui est de la forme $\left\{\frac{a}{\alpha_2}\right\} D_1 + \left\{\frac{b}{\alpha_3}\right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\right] E$, où D_1 correspond à la restriction dans Y du diviseur torique donné par le rayon v_3 et D_2 correspond à la restriction dans Y du diviseur torique donné par le rayon v_4, c'est-à-dire les transformés stricts des courbes $\{u = y^d z^{\alpha_2} = 0\}$ et$\{w = yt^{\alpha_3} = u + p(v) = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2$ respectivement. Le diviseur E correspond au diviseur donné par v_2, c'est-à-dire le diviseur exceptionnel.

2) On suppose que X admet un point fixe, donc X contient l'origine de $\mathbb{A}^4$ qui est l'unique point fixe pour l'action linéaire décrite dans l'énoncé et ainsi $p(0) = 0$. Ceci implique pour X :

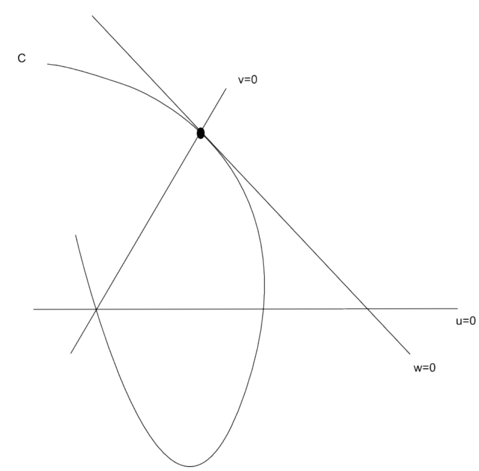
$$X = \{y^{d-1}z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} + x\prod_{i=1}^{k}(xy + \alpha_i) = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]).$$

A l'aide du critère Jacobien, X est lisse dans ce cas si et seulement si $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$ dans l'équation de l'hypersurface X ce qui est équivalent à $p(v)$ ne possède que des racines simples et donc $D = L_1 + L_2$ dans $\mathbb{A}^2_{(u,v)}$ est un diviseur à croisements normaux.

3) On va traiter complètement un cas particulier, le cas $\deg(p) = 2$, c'est-à-dire, $p(v) = v + v^2$. Puis on expliquera comment généraliser à un degré quelconque. On ne donnera pas immédiatement les équations des éclatements, puisque la formule dans le cas général est explicitée à la fin de cette démonstration. Pour ce faire on va plonger $D = L_1 + L_2 \subset \mathbb{A}^2_{(u,v)}$ dans $\mathbb{P}^2_{(u:v:w)}$, considérer ainsi l'image de D par ce plongement union la droite à l'infini. On effectue une suite d'éclatements et de contractions pour obtenir un diviseur SNC correspondant à l'union des axes de coordonnées dans $\mathbb{P}^2$.

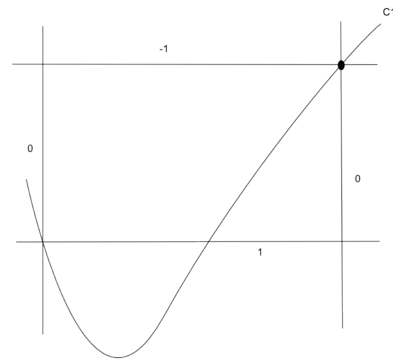


$D = L_1 + L_2$ dans $\mathbb{A}^2_{(u,v)}$.

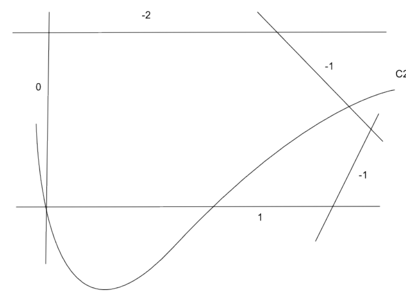


Plongement dans $\mathbb{P}^2$.

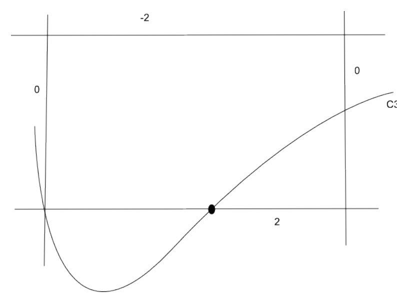
On éclate alors le point d'intersection de la courbe C et de la droite à l'infini dans le but d'obtenir un diviseur SNC.



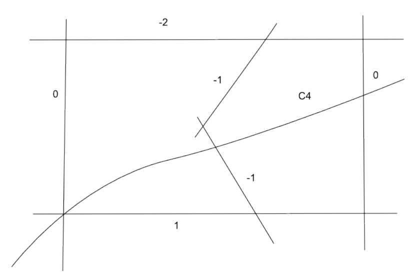
On se retrouve alors dans une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_1$ et il faut éclater de nouveau le point d'intersection de C et du diviseur exceptionnel.



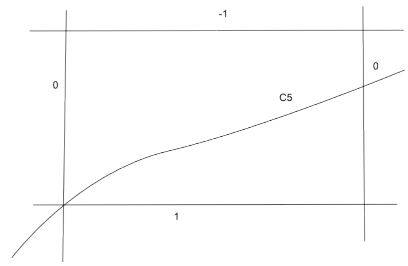
On contracte maintenant la (-1)-courbe qui ne correspond pas au diviseur exceptionnel du précédent éclatement, on est alors dans $\mathbb{F}_2$, surface de Hirzebruch.



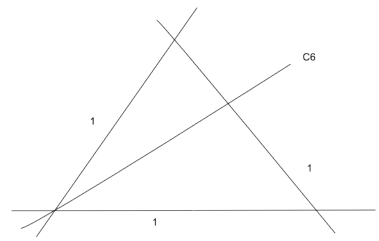
On éclate le point d'intersection différent de celui défini par l'idéal (u, v). L'image inverse de la fibre passant par le point éclaté est donnée par deux courbes d'auto-intersection (-1).



Après contraction d'une (-1) courbe différente du diviseur exceptionnel du précédent éclatement, on obtient des diviseurs dans $\mathbb{F}_1$.



Résolution finale dans $\mathbb{P}^2$, obtenue après contraction de la dernière (-1) courbe .



Ainsi si $\deg(p) = 2$, $D = L_1 + L_2$ dans $\mathbb{A}^2$ est rectifiable. On va maintenant généraliser la situation avec un diviseur D respectant ces hypothèses avec $p(v)$ de degré d.

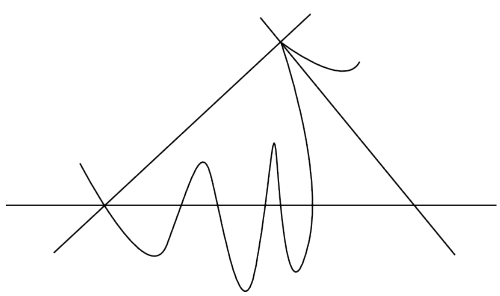


FIGURE 4.3.1 – Plongement dans $\mathbb{P}^2$

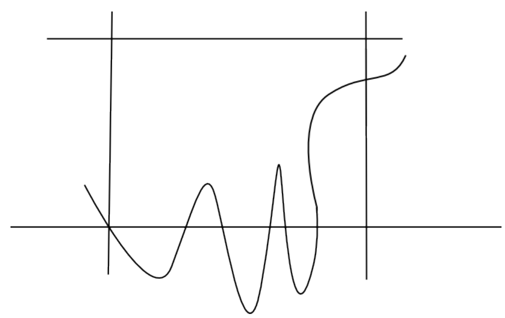


FIGURE 4.3.2 – Après une suite d'éclatement de points donnés par l'intersection de la courbe et L_∞, suivi d'une suite de contraction, on obtient $\mathbb{F}_d$

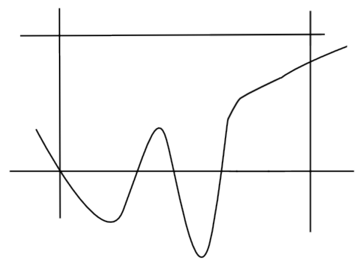


FIGURE 4.3.3 – Résolution des autres croisements, $\mathbb{F}_{d-2}$

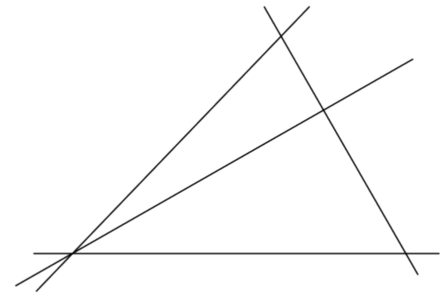


FIGURE 4.3.4 – Résolution finale, $\mathbb{P}^2$

Cette résolution permet d'obtenir l'isomorphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant entre un voisinage ouvert de l'origine et un ouvert de $\mathbb{A}^3$. Pour cela dans $\mathbb{A}^2_{(u,v)}$, on a supposé que la courbe passée par l'origine et intersectée normalement l'axe de coordonnées $\{u = 0\}$, on peut ainsi éclater les points d'intersection de la courbe avec l'axe de coordonnées $\{u = 0\}$ différent de l'origine.

Soit $D = L_1 + L_2$ dans $\mathbb{A}^2$ avec $L_1 = \{u = 0\}$ et $L_2 = \{u + v\prod_{i=1}^{k}(v + \alpha_i) = 0\}$. on va montrer que D est birationnellement équivalent à $D' = \{uv = 0\}$.

On considère l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ le long du sous-schéma d'idéal $(u, v + \alpha_k)$, alors l'équation de le transformé strict de D dans une des cartes est donnée par $D' = L'_1 + L'_2$ où $L'_1 = \{u' = 0\}$ et $L'_2 = \{u' + v'\prod_{i=1}^{k-1}(v' + \alpha_i) = 0\}$ ainsi par récurrence D est birationnellement équivalent à $D'' = L''_1 + L''_2$ où $L''_1 = \{u'' = 0\}$ et $L''_2 = \{u'' + v'' = 0\}$.

Alors d'après le corollaire 4.2.6, le lemme2.1.13 , et [A-H, Corollary 8.12.] X est $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnel. $\square$

Plus précisément on explicite l'application birationnelle sur le quotient A-H afin de la remonter en une application birationnelle équivariante entre X et $\mathbb{A}^3$.

Soit $p(v) = v(1 + g(v))$. On considère l'application birationnelle :

$$\phi : (u, v) \to (-u'(g(v' + u') + 1), v' + u'),$$

son inverse étant donné par

$$\phi^{-1} : (u', v') \to (-\frac{u}{1 + g(v)}, v + \frac{u}{1 + g(v)}).$$

Alors $\phi(u + p(v)) = v'(g(v' + u') + 1)$.

Notons :

$$Y' = \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)} \setminus V(1 + g(v)) \simeq \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u',v'^d)} \setminus V(g(v' + u') + 1),$$

et $i : Y' \hookrightarrow \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)}$, alors $\mathbb{S}(Y', i^*(\mathcal{D})) = U$ est un voisinage ouvert du point fixe qui est isomorphe de manière équivariante à un ouvert de $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[Y, Z, T])$ muni de l'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ donné par $\lambda \cdot (Y, Z, T) = (\lambda^{-\alpha_2\alpha_3} Y, \lambda^{d\alpha_3} Z, \lambda^{\alpha_2} T)$.

On peut remarquer, premièrement, que la rectification du diviseur est toujours possible s'il n'est pas à croisements normaux. Cela va correspondre au cas où la variété X n'est pas lisse, elle sera alors $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnelle au point fixe et l'ouvert obtenu ne contiendra pas les singularités de X.

Deuxièmement, la famille de variétés que l'on considère peut être vue comme une modification en plusieurs étapes de la variété :

$$\{z^d + t + p(x) = 0\} \simeq \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, z, t]),$$

qui correspond à un plongement de $\mathbb{A}^2$ dans $\mathbb{A}^3$. On commence par effectuer une modification hyperbolique de ce $\mathbb{A}^2$ qui donne :

$$\{y^{d-1} z^d + t + p(xy) y^{-1} = 0\} \simeq \mathbb{A}^3 \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

on construit un revêtement bi-cyclique d'ordre α_2 le long du diviseur $\{z = 0\}$ et d'ordre α_3 le long du diviseur $\{t = 0\}$ ainsi $V \simeq \{y^{d-1} z^{d\alpha_2} + t^{\alpha_3} + p(xy) y^{-1} = 0\} \subset \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$. Pour finir, on quotiente V par le groupe μ_d qui agit via $\epsilon \cdot (x, y, z, t) \to (x, y, \epsilon z, t)$.

Corollaire 4.3.4. *Les variétés suivantes dans* $\mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$ *sont* $\mathbb{G}_m$-*linéairement rationnelles :*

$$X_1 = \{x + x^k y^{k-1} + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$$

$$X_2 = \{x + y^{d-1}(x^d + z^{\alpha_2}) + t^{\alpha_3} = 0\}.$$

Démonstration. On applique le Théorème 4.3.3. X_1 correspondant au choix $d = 1$ et $p(v) = v + v^k$ et X_2 correspondant au choix $d \geq 2$ et $p(v) = v + v^d$.

On peut alors expliciter un voisinage ouvert du point fixe et un isomorphisme équivariant pour chacune de ces variétés, cela en relevant les applications birationnelles de $\mathbb{A}^2$ données précédemment :

1) On considère $X_1 \setminus V(1 + (xy)^{d-1})$ et $\mathbb{A}^3 \setminus V(1 + (YZ^{\alpha_2} + YT^{\alpha_3})^{d-1})$ ainsi que l'application ψ donnée par :

$$\begin{array}{cc} \psi(x) = -\frac{Z^{\alpha_2} + T^{\alpha_3}}{1 + (YZ^{\alpha_2} + YT^{\alpha_3})^{d-1}}; & \psi(y) = -Y(1 + (YZ^{\alpha_2} + YT^{\alpha_3})^{d-1}); \\ \psi(z) = Z; & \psi(t) = T, \end{array}$$

et son inverse ψ^{-1} :

$$\psi^{-1}(Y) = \frac{-y}{1+(xy)^{d-1}}; \psi^{-1}(Z) = z; \psi^{-1}(T) = t.$$

2) On considère $X_2 \setminus V(1+(xy)^{d-1})$ et $\mathbb{A}^3 \setminus V(1+(Y^dZ^{\alpha_2}+YT^{\alpha_3})^{d-1})$ ainsi que l'application ψ donnée par :

$$\begin{array}{cc} \psi(x) = -Y^{d-1}Z^{\alpha_2} - \frac{T^{\alpha_3}}{1+(Y^dZ^{\alpha_2}+YT^{\alpha_3})^{d-1}}; & \psi(y) = -Y(1+(YZ^{d\alpha_2}+YT^{\alpha_3})^{d-1}); \\ \psi(z) = Z; & \psi(t) = T, \end{array}$$

et son inverse ψ^{-1} :

$$\psi^{-1}(Y) = \frac{-y}{1+(xy)^{d-1}}; \psi^{-1}(Z) = z; \psi^{-1}(T) = t.$$

$\square$

Théorème 4.3.5. *Toutes les variétés de Koras-Russell de première espèce sont $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles.*

Démonstration. Soit $X = \{x + x^ky + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$ une variété de Koras-Russell de première espèce et soit $\mathcal{U} \subset X$ l'ouvert donné par x différent de zéro. Alors clairement X est $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnelle en tout point inclus dans $\mathcal{U}$, si $x \neq 0$ alors $y = \frac{-x-t^{\alpha_3}-z^{\alpha_2}}{x^k}$. D'après le corolaire 4.3.4 on a explicitement un isomorphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant entre un voisinage ouvert du point fixe dans $X_1 = \{x + x^dy^{d-1} + z^{\alpha_2} + t^{\alpha_3} = 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{A}^3$. De plus X_1 admet une action du groupe cyclique μ_{d-1} donnée par $\epsilon \cdot (x,y,z,t) \to (x, \epsilon y, z, t)$ et le quotient pour cette action et l'isomorphisme commute en effet les orbites de ce groupe cyclique sont incluses dans les orbites de $\mathbb{G}_m$. Dans le cas de $\mathbb{A}^3$ le quotient pour l'action de μ_{d-1} est encore isomorphe à un $\mathbb{A}^3$. Étant donné que $X_1//\mu_{d-1} \simeq X$, l'application $\mathbb{G}_m$-équivariante ψ dans le corolaire 4.3.4 donne l'application appropriée ψ_{d-1} qui est $\mathbb{G}_m$-équivariante en substituant y à y^{d-1} :

$$\begin{tikzcd} X_1 \setminus V(1+(xy)^{d-1}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "//\mu_{d-1}"] & \mathbb{A}^3 \setminus V(1+(YZ^{\alpha_2}+YT^{\alpha_3})^{d-1}) . \arrow[d, "//\mu_{d-1}"] \\ X \setminus V(1+yx^{d-1}) \arrow[r, "\psi_{d-1}"] & \mathbb{A}^3 \setminus V(1+Y(Z^{\alpha_2}+T^{\alpha_3})). \end{tikzcd}$$

On vérifie alors facilement que l'ouvert $\mathcal{U} \subset X$ donné par $x \neq 0$ et l'ouvert $\mathcal{V} \subset X$ donné par $1 + yx^{d-1} \neq 0$ recouvre X. $\square$

Proposition 4.3.6. *Les variétés de Koras-Russell de seconde espèce données par l'équation $X = \{x + y(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\}$ pour $l = 1$ ou $l = 2$ ou $d = 2$ sont $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelles.*

Démonstration.

Dans le cas où $l = 1$ on considère la variété :

$$X_2 = \{x + y^{d-1}(x^d + z^{\alpha_2}) + t^{\alpha_3} = 0\}$$

donnée dans le corollaire 4.3.4 et on applique exactement la même méthode que dans le Théorème 4.3.5 en considérant l'action du groupe cyclique μ_{d-1} sur X_2 donné par $\epsilon \cdot (x, y, z, t) \to (x, \epsilon y, z, t)$.

Dans le cas où $l = 2$ ou $d = 2$, on a besoin d'un nouvel argument. On considère le recouvrement cyclique de X d'ordre $dl-1$ le long du diviseur $\{y = 0\}$ on obtient ainsi $X_{d-1} = \{x + y^{dl-1}(x^d + z^{\alpha_2})^l + t^{\alpha_3} = 0\}$

On va prouver que X_{d-1} est $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnelle et ainsi expliciter une application birationnelle entre X et $\mathbb{A}^3$ qui sera un isomorphisme équivariant sur un ouvert de X contenant le point fixe. La présentation A-H de X_{d-1}(voir 3.3) est $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)}, \mathcal{D})$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{a}{\alpha_2}\right\} D_{\alpha_3} + \left\{\frac{b}{\alpha_3}\right\} D_{\alpha_2} + \left[0, \frac{1}{\alpha_2\alpha_3}\right] E,$$

où E est le diviseur exceptionnel de :

$$\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v^d)} \to \mathbb{A}^2 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v]) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y^d z^{\alpha_2}, yx]),$$

et où D_{α_2} et D_{α_3} sont les transformés stricts des courbes $\{v + (u + v^d)^l) = 0\}$ et $\{u = 0\}$ dans $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v])$ respectivement, quant à $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, ils sont choisis tel que $ad\alpha_3 + b\alpha_2 = 1$.

Premièrement le rôle de l et d peut être échangé, il suffit de considérer l'automorphisme de $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v])$ qui envoie u sur $u - (v - u^l)^d$ et v sur $v - u^l$. Alors il envoie $v + (u + v^d)^l)$ sur v. On supposera désormais que $l = 2$.

On considère l'application birationnelle φ de $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[u, v])$ envoyant u sur $\frac{u(1+(v-u^2)^{2d-1})}{1-u(v-u^2)^{d-1}}$ et v sur $v - u^2$. Cette application permet de montrer que $D = L_1 + L_2$ est birationnellement équivalent à $D' = \{uv = 0\}$. Ainsi X_{d-1} est $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnelle. De plus l'application φ est μ_{2d-1}-équivariante, si on considère l'action de μ_{2d-1} donnée par $\epsilon \cdot (u, v) \to (\epsilon u, \epsilon v)$. On obtient alors le résultat désiré en appliquant la même technique que pour le Théorème 4.3.5. □

4.3.2 Variétés non $\mathbb{G}_m$-rationnelles et certains cas spéciaux

Il est clair que la propriété d'être G-uniformément rationnelle est plus restrictive que d'être seulement uniformément rationnelle pour une variété. Il n'est donc pas surprenant qu'il existe des variétés lisses rationnelles et de plus munies d'une action d'un groupe G mais qui ne sont pas G-uniformément rationnelle .

L'intérêt de cette propriété réside dans le fait, comme expliqué précédemment, que dans le cas des actions de tore algébrique, on peut prouver en utilisant des arguments géométriques sur la non-rectifiabilité birationnelle de paire de courbes, affirmer que des variétés ne sont pas $\mathbb{T}$-linéairement uniformément rationnelles et donc ne sont pas $\mathbb{T}$-uniformément rationnelles pour $\mathbb{T} \simeq \mathbb{G}_m$ et $\dim(X) = 3$. Dans cette partie on va exhiber certaines de ces variétés en commençant par un cas très simple. Cependant on n'a pas de méthode pour décider si ces variétés sont uniformément rationnelles sans action de $\mathbb{G}_m$.

Considérons X une variété lisse rationnelle munie d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ avec un point fixe pour cette action, de telle manière que son quotient A-H soit donné par $Y(X) \simeq \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}$ l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ dans le sous-schéma d'idéal (u, v). On suppose de plus que dans sa présentation en terme de p-diviseur, il apparaît le transformé strict d'une courbe elliptique affine passant par l'origine avec pour coefficient un élément non entier. Alors X n'est pas $\mathbb{G}_m$-rationnelle et donc n'est pas $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelle.

Proposition 4.3.7. *La $\mathbb{G}_m$-variété $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^n_{(u,v)}, \mathcal{D})$ avec $\mathcal{D} = \left\{\frac{1}{p}\right\} D + [0, \frac{1}{p}]E$, où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement et D est le transformé strict de la courbe elliptique affine $C = \{h(u, v) = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ passant par l'origine, est une variété lisse rationnelle mais non $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelle.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la classification donnée dans le corollaire 4.2.6 des $\mathbb{A}^3$ muni d'une action hyperbolique, les diviseurs sont dans ce cas rationnels. De plus la variété $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^n_{(u,v)}, \mathcal{D})$ est obtenue à l'aide de la proposition 1.4.10 et D est une courbe elliptique qui n'est pas rationnelle. Les variétés ainsi obtenues sont donc non $\mathbb{G}_m$-linéairement uniformément rationnelle et ainsi non $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelle car les deux définitions sont équivalentes pour des $\mathbb{G}_m$-variétés de complexité deux. □

La proposition précédente donne ainsi la famille suivante de variétés non $\mathbb{G}_m$-rationnelles :

$$\{h(xy, zy)/y + t^p = 0\} \in \mathbb{A}^4 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

où $V(h)$ est une courbe elliptique, ou plus généralement un ouvert affine d'une courbe lisse projective de genre $g > 0$. On ne sait pas si ces variétés sont uniformément rationnelles

L'action de $\mathbb{G}_m$est induite par une action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donnée par $\lambda \cdot (x, y, z, t) = (\lambda^p x, \lambda^{-p} y, \lambda^p z, \lambda t)$.

Plus surprenant maintenant, l'obstruction due au genre de la courbe qui compose le support du p-diviseur pour la $\mathbb{G}_m$-variété n'est pas l'unique obstruction au fait d'être $\mathbb{G}_m$-rationnelle. En effet, il existe des diviseurs $D = L_1 + L_2$ où L_i est isomorphe à $\mathbb{A}^1$ pour $i = 1, 2$ mais tel que D n'est pas birationnellement équivalent à $D' = \{uv = 0\}$. Pour démontrer cela on va utiliser la dimension de Kumar-Murthy (voir [Ku-Mu]), celle-ci a été utilisée initialement pour démontrer la rectification d'un courbe irréductible, mais la définition s'adapte au cas d'une paire de courbes.

Définition 4.3.8. i) Soit (X, D) un couple tel que X est une surface lisse projective et D un diviseur à *croisement normaux simples.* Alors on dit que le couple (X, D) est lisse.

ii) Pour tout diviseur D sur une variété projective lisse on peut définir *la dimension de Iitaka* :

$$\kappa(X, D) := sup\, dim\phi_{|nD|}(X) \in \{-\infty, \dots, dim(X)\},$$

avec $\phi_{|nD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ qui est l'application rationnelle associée au système linéaire $|nD|$ sur X.

On remarque que si deux diviseurs sont équivalents $D \sim D'$ alors la dimension d'Iitaka, étant définie par le système linéaire complet du diviseur D, on a $\kappa(X, D) = \kappa(X, D')$.

Définition 4.3.9. On appelle *dimension de Kumar-Murthy* de (X_0, D) la dimension d'Iitaka $\kappa(X, 2K_X + D_X)$. On la notera $k_M(X_0, D)$

Proposition 4.3.10. *Soit $D = \sum_{i=1}^{k} D_i$ est un diviseur réduit, avec D_i irréductible pour $i = 1 \dots k$, sur X_0 une variété complète de dimension 2. Soit$\pi : X \to X_0$ tel que le transformé strict D_X de D est un diviseur à croisements normaux simples. Alors la dimension d'Iitaka $\kappa(X, 2K_X + D_X)$ ne dépend pas du choix de la résolution.*

Démonstration. Par le théorème de Zariski, il suffit de montrer que cette dimension est invariante par un éclatement. Soit (X, D_X) une résolution du couple (X_0, D) tel que D_X soit à croisement normaux simple.

On considère $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X au point p. Il existe alors trois cas possibles car D_X est a croisements normaux simples :

i) Si $p \notin D_X$ alors $\pi^*(D_X) = D_{\tilde{X}}$ le transformé strict de D_X.

ii) Si p appartient uniquement à une composante irréductible de D_X alors $\pi^*(D_X) = D_{\tilde{X}} + E$ où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

iii) Si p est un point où se croisent deux diviseurs irréductibles de D_X, alors $\pi^*(D_X) = D_{\tilde{X}} + 2E$ où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

De plus on a $\pi^*(K_X) = K_{\tilde{X}} - E$. Ainsi

$$2K_{\tilde{X}} + D_{\tilde{X}} = 2(\pi^*(K_X) + E) + \pi^*(D_X) - nE,\ n = 0, 1, 2$$

$$2K_{\tilde{X}} + D_{\tilde{X}} = \pi^*(2K_X + D_X) + (2-n)E,\ n = 0, 1, 2.$$

Ainsi,

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(2K_{\tilde{X}}+D_{\tilde{X}})) = \Gamma(X, \mathcal{O}(\pi^*(2K_X+D_X)+(2-n)E)) = \Gamma(X, \mathcal{O}(\pi^*(2K_X+D_X))),$$

donc par la formule de projection ([Har, II.5]), on obtient $\Gamma(X, \mathcal{O}(\pi^*(2K_X + D_X))) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}(2K_X + D_X))$. $\square$

La dimension de Kumar-Murthy est ainsi bien définie et ne dépend pas du choix de la résolution.

Exemple 4.3.11. Soit $D = L_1 + L_2$ un diviseur snc tel que L_i est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ pour $i = 1, 2$ et que D soit à croisements normaux alors $k_M(\mathbb{P}^2, D) = -\infty$.

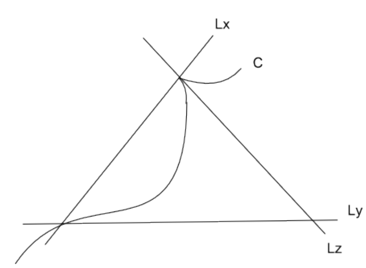
Corollaire 4.3.12. *Soit $D = D_1 + D_2$ un diviseur sur $\mathbb{P}^2$, si D est birationnellement rectifiable alors $k_M(\mathbb{P}^2, D) = -\infty$.*

Lemme 4.3.13. *Il existe des diviseurs D dans $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$, $D = D_1 + D_2$ où D_1 et D_2 sont isomorphes à $\mathbb{A}^1$ et tel que D n'est pas birationnellement rectifiable.*

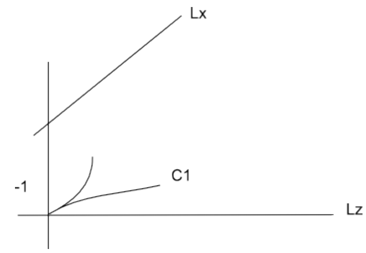
Démonstration. Pour cela on va exhiber un exemple d'un tel diviseur. On considère les deux copies de $\mathbb{A}^1$ plongées dans $\mathbb{A}^2$ suivantes $D_1 = \{x + (y + x^2)^2\}$ et $D_2 = \{\lambda y(y - \mu) + x = 0\}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ sont des paramètres génériques choisis tel que D_1 et D_2 s'intersectent normalement. On pose C et C' la clôture de D_1 et de D_2 respectivement. On va montrer que $k_M(\mathbb{P}^2, (C + C') \neq -\infty$

On peut réaliser indépendamment les éclatements correspondant à C et C', en effet elle n'intersectent pas la droite à l'infini au même point. On va effectuer dans un premier temps une suite d'éclatements pour que le transformé total de la courbe C et de la droite à l'infini donne un diviseur snc. On se placera dans une carte isomorphe à $\mathbb{A}^2$ et pour chaque éclatement π_i les coordonnées du diviseur exceptionnel, isomorphe à $\mathbb{P}^1$, seront données par $(x_i : z_i)$.

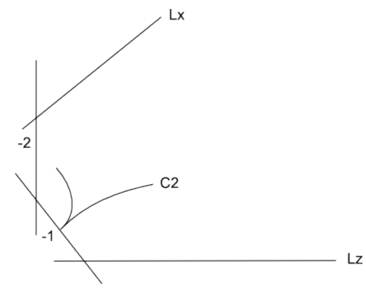
$\{xz^3 + (yz + x^2)^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$



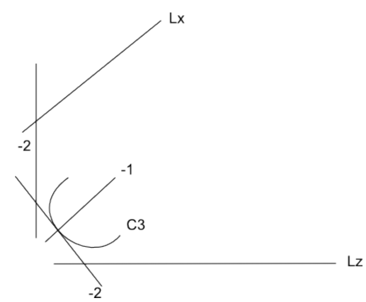
On considère la carte donnée par $y \neq 0$, on éclate alors la singularité.
Une des cartes de l'éclatement est donnée par $x_1 \neq 0$ et donc $z = xz_1$
$\pi_1^*(C) = \{x^4 z_1^3 + (xz_1 + x^2)^2 = 0\} = 2E_1 + C_1$
et $C_1 = \{x^2 z_1^3 + (z_1 + x)^2 = 0\}$



On éclate de nouveau la singularité. On a alors une des cartes de l'éclatement donnée par $z_2 \neq 0$ et donc $x = x_2 z_1$
$\pi_2^*(C_1) = \{x_2^2 z_1^5 + (z_1 + x_2 z_1)^2 = 0\} = 2E_2 + C_2$
et $C_2 = \{x_2^2 z_1^3 + (1 + x_2)^2 = 0\}$

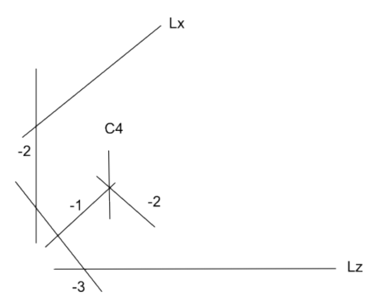


Après changement de coordonnées afin de placer la singularité à l'origine, on éclate celle-ci.
On a alors une des cartes de l'éclatement donnée par $z_3 \neq 0$ et donc $x_2 + 1 = x_3 z_1$
$\pi_3^*(C_2) = \{(x_3 z_1 - 1)^2 z_1^3 + x_3^2 z_1^2 = 0\} = 2E_3 + C_3$
et $C_3 = \{(x_3 z_1 - 1)^2 z_1 + x_3^2 = 0\}$



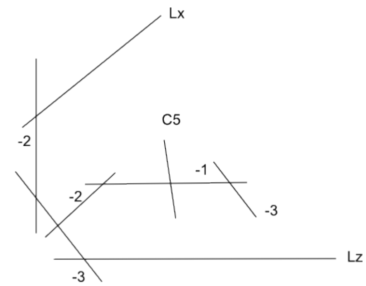
On éclate de nouveau à l'origine dans notre système de coordonnées :

On a alors une des cartes de l'éclatement donnée par $x_4 \neq 0$ et donc $x_3 z_4 = z_1$
$\pi_4^*(C_3) = \{(x_3^2 z_4 - 1)^2 x_3 z_4 + x_3^2 = 0\} = E_4 + C_4$
et $C_4 = \{(x_3^2 z_4 - 1)^2 z_4 + x_3 = 0\}$



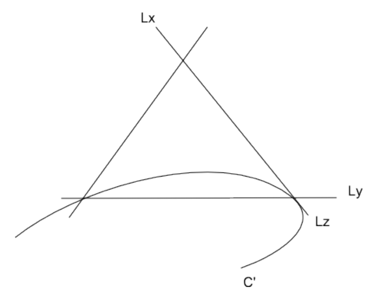
On veut une résolution snc ce qui implique d'éclater une dernière fois :

On a alors une des cartes de l'éclatement donnée par $x_5 \neq 0$ et donc $x_3 z_5 = z_4$
$\pi_5^*(C_4) = \{(x_3^3 z_5 - 1)^2 x_3 z_5 + x_3 = 0\} = E_5 + C_5$
et $C_5 = \{(x_3^2 z_1 - 1)^2 z_5 + 1 = 0\}$

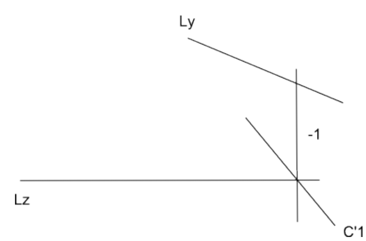


Et on effectue dans un deuxième temps une suite d'éclatements pour le cas de la courbe C'. On se placera dans une carte isomorphe à $\mathbb{A}^2$ et pour chaque éclatement π_i les coordonnées du diviseur exceptionnel, isomorphe à $\mathbb{P}^1$, seront données par $(y_i : z_i)$.

$$\{\lambda y(y - \mu z) + xz = 0\} \subset \mathbb{P}^2$$

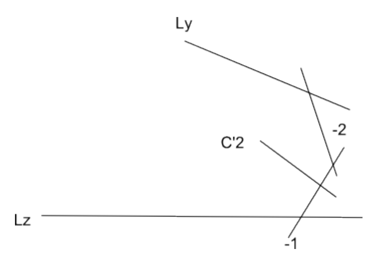


On considère la carte donnée par $x \neq 0$, on éclate alors l'origine.
Une des cartes de l'éclatement est donnée par $y_1 \neq 0$ et donc $z = yz_1$
$\pi_1^*(C') = \{\lambda y(y - \mu y z_1) + y z_1 = 0\} = E_1' + C_1'$
et $C_1' = \{\lambda(y - \mu y z_1) + z_1 = 0\}$



On veut une résolution snc ce qui implique d'éclater une dernière fois :

On a alors une des cartes de l'éclatement donnée par $y_2 \neq 0$ et donc $yz_2 = z_1$
$\pi_2^*(C_1') = \{\lambda(y - \mu y^2 z_2) + y z_2 = 0\} = E_2' + C_2'$
et $C_2' = \{\lambda(1 - \mu y z_2) + z_2 = 0\}$



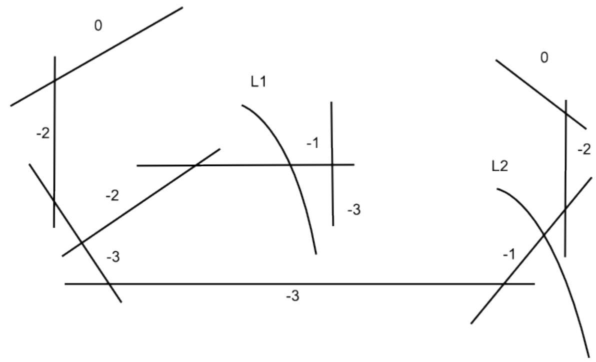


FIGURE 4.3.5 – résolution globale $(S_7, \bar{D} = L_1 + L_2)$

On note par $\pi : S_7 \to \mathbb{P}^2$ l'application finale. On rappelle que le diviseur canonique de $\mathbb{P}^2$ est $-3l$ avec l une droite générique, de plus pour tout éclatement $\pi' : \tilde{X} \to X$ on a $\pi'^*(K_X) = K_{\tilde{X}} - E$.

Ce qui implique pour le diviseur canonique de la surface après éclatement : $K_{S_7} = -3l + E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 6E_4 + 10E_5 + E'_1 + 2E'_2$, où l est un hyperplan générique.

Pour ce qui est du transformé total de $C + C'$, on a $\pi^*(C + C') = L + 2E_1 + 4E_2 + 6E_3 + 11E_4 + 18E_5 + L' + E'_1 + 2E'_2$.

Or C était de degré 4 et C' de degré 2 d'où $2K_{S_7} + \overline{D} = 2K_{S_7} + \pi^*(C + C') - (2E_1 + 4E_2 + 6E_3 + 11E_4 + 18E_5 + E'_1 + 2E'_2) = E_4 + 2E_5 + E'_1 + 2E'_2$ qui est un diviseur effectif.

Donc $k_M(\mathbb{P}^2, D) \neq -\infty$ et D n'est pas rectifiable. □

Revenons à la construction initiale des variétés de Koras-Russell (voir §3.2). Ces variétés sont obtenues en considérant au départ deux copies de $\mathbb{A}^1$ qui s'intersectent normalement à l'origine et en $d-1$ autres points. Le diviseur précédemment considéré répond à ces critères avec $d = 8$, ainsi on peut affirmer :

Théorème 4.3.14. *Il existe des variétés de Koras-Russell qui ne sont pas $\mathbb{G}_m$-rationnelles au point fixe.*

Démonstration. Pour cela on va montrer qu'il existe des variétés de Koras-Russell qui ne sont pas $\mathbb{G}_m$-linéairement rationnelles au point fixe, puisque c'est équivalent dans ce cas. On considère la variété de Koras-Russell isomorphe de manière équivariante à $\mathbb{S}(\tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)}, \mathcal{D})$ avec

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{a}{\alpha_2} \right\} D_1 + \left\{ \frac{b}{\alpha_3} \right\} D_2 + \left[0, \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} \right] E$$

où E est le diviseur exceptionnel de $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2_{(u,v)} \to \mathbb{A}^2$, D_1 et D_2 sont les transformés strictes des courbes L et L' données dans le lemme 4.3.13, de plus $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifient $a\alpha_3 + b\alpha_2 = 1$. □

Le théorème précédent donne la famille de variétés de Koras-Russell non $\mathbb{G}_m$-rationnelles suivante :

$$\{z^{\alpha_2}-\lambda x(xy-\mu)+y(x+y(z^{\alpha_2}-\lambda x(xy-\mu))^2)^2+t^{\alpha_3}=0\} \in \mathbb{A}^4=\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z,t]).$$

L'action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ est induite par l'action linéaire sur $\mathbb{A}^4$ donnée par $\lambda\cdot(x,y,z,t)=(\lambda^{\alpha_2\alpha_3}x,\lambda^{-\alpha_2\alpha_3}y,\lambda^{\alpha_3}z,\lambda^{\alpha_2}t)$.

Chapitre 5

Questions ouvertes

$\mathbb{T}$-variétés lisses et linéarisation des action de $\mathbb{G}_m$.

Dans la sous-section §3.5 on a caractérisé la particularité d'être lisse dans le cas d'une action hyperbolique de $\mathbb{G}_m$ et un quotient A-H du type $\widetilde{Y}$, les questions qui viennent immédiatement après sont les suivantes :

i) Peut-on caractériser la propriété d'être lisse pour n'importe quelle $\mathbb{T}$-variété de complexité 2 ?

ii) Si l'on considère des actions de n'importe quelle complexité, mais en gardant une action de $\mathbb{G}_m$, est-il possible aussi dans ce cas de caractériser la propriété d'être lisse ?

Pour ce qui est de la seconde question elle est reliée au problème de linéarisation des actions de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^n$. Cependant la linéarisation des actions de $\mathbb{G}_m$ est un problème ouvert déjà dans le cas $n = 4$, on va développer quelques éléments pour étudier le problème de linéarisation du point de vue de la théorie Altmann-Hausen.

Si on considère une variété X lisse de dimension 3 munie d'une action hyperbolique ayant un unique point fixe, alors l'action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur le plan tangent à ce point fixe est de la forme :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda^a x_1, \lambda^b x_2, \lambda^{-c} x_3),$$

avec a, b et c de même signe.

C'est l'un des points de départ pour la construction des variétés de Koras-Russell avec le fait que l'on connait le quotient algébrique d'une variété contractile par une action de $\mathbb{G}_m$ si le quotient est de dimension 2.

Théorème 5.0.15. *[Kr-Pet-Ra, Théorème B] Soit X une variété munie d'une action de groupe réductif alors si X est contractile $X//G$ l'est aussi et si X est acyclique $X//G$ l'est aussi.*

On rappelle qu'un morphisme $\pi : X \to Y$ est dominant si l'image de X dans Y est dense.

Théorème 5.0.16. *[G-K-R] Soit X une variété contractile dominée par $\mathbb{A}^n$ on suppose de plus X munie d'une action d'un groupe réductif G tel que le quotient $X//G$ est de dimension 2 alors $X//G$ est isomorphe à $\mathbb{A}^2/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe fini de Gl_2.*

On a alors le quotient A-H afin de construire de possibles candidats à être $\mathbb{A}^3$ muni d'une action de $\mathbb{G}_m$.

Dans le cas d'une action linéaire de $\mathbb{G}_m$ sur $X = \mathbb{A}^4$ donnée par :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda^{-1} x_4),$$

le quotient A-H est bien compris, il est alors isomorphe à $\tilde{\mathbb{A}}^3$.

Mais ce n'est pas la seule possibilité. Il y a aussi le cas où

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^{-1} x_3, \lambda^{-1} x_4).$$

Cette exemple est traité entièrement dans [Do, exemple 8.6]. On ne fait que rappeler ici la construction pour montrer la diversité croissante des quotients possibles quand bien même la variété reste un espace affine.

Dans ce cas on a :

$$\mathbb{A}^4 // \mathbb{G}_m \simeq Y_0 \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, t_4]/(t_1 t_4 - t_2 t_3)),$$

avec $t_1 = x_1 x_3$, $t_2 = x_1 x_4$, $t_3 = x_2 x_3$ et $t_4 = x_2 x_4$ et cela correspond à un cône quadrique. Ainsi en utilisant le Théorème 1.4.5 le quotient A-H est isomorphe à $\tilde{Y_0}$ où $\tilde{Y_0}$ est défini par l'éclatement $\pi : \tilde{Y_0} \to Y_0$ de Y_0 le long du sous-schéma d'idéal $\mathcal{I} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$.

Si l'on veut alors étudier le cas de la linéarisation des actions de $\mathbb{G}_m$ en dimension n, le nombre de quotient A-H est de $n/2$ si n est pair et de $(n+1)/2$ sinon. Il faut alors déterminer les p-diviseurs admissibles, c'est-à-dire ceux qui permettent de construire des variétés lisses et contractiles.

Une fois les constructions réalisées il resterait à déterminer quelles variétés sont des espaces exotiques et lesquelles sont isomorphe à $\mathbb{A}^4$, cette classification en dimension 3 n'est pour le moment possible qu'en utilisant la théorie des dérivations localement nilpotentes. Ce qui laisse penser que la théorie Altmann-Hausen elle-seule ne suffit pas.

Un autre problème possible dans cette classification provient du fait qu'en dimension 3 les variétés de Koras-Russell sont représentables comme hypersurface de $\mathbb{A}^4$, mais ceci n'est vrai que grâce au théorème d'épimorphisme qui permet de rectifier par un automorphisme le support d'un des p-diviseurs (voir §3.2 et §3.5). En dimension supérieure il n'existe pas de théorème comparable.

G-uniformément rationnelle, version faible.

La propriété d'être G-linéairement uniformément rationnelle est une propriété très forte, en effet on demande que les ouverts de $\mathbb{A}^n$ soient munis d'actions linéaires de G. On a donné la définition de G-uniformément rationnelle qui est une version affaiblie de cette dernière, mais on peut introduire la définition suivante :

Définition 5.0.17. i) Soit X une G-variété et $x \in X$. On dit que X est *G-faiblement rationnelle* au point x si il existe un voisinage ouvert G-stable U_x de x, et $V \subset \mathbb{A}^n$ muni d'une action de G tel que U_x soit isomorphe de manière équivariante à V.

ii) Une G-variété qui est G-faiblement rationnelle en tout point est dite *G-faiblement uniformément rationnelle.*

On va donner un exemple d'action du groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur une surface tel que la surface soit uniformément rationnelle car lisse et rationnelle. On montre que cette surface est G-faiblement rationnelle mais pas G-rationnelle.

On considère une courbe elliptique lisse, affine : $C = \{y^2 + x^3 - 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ et on effectue le recouvrement cyclique de $\mathbb{A}^2$ d'ordre 2 au-dessus de cette courbe, on obtient ainsi la surface S suivante :

$$S = \{z^2 - y^2 - x^3 + 1 = 0\} = \{(z - y)(z + y) - x^3 + 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^3.$$

Cette surface est une surface de Danielewski lisse, rationnelle et elle est de plus l'union de trois ouverts chacun isomorphe à $\mathbb{A}^2$. Cette surface est donc $\mathcal{A}$-couverte au sens de [Ar-Pe-Sü].

Cette surface admet de plus une action du groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, provenant du recouvrement d'ordre 2, donnée par $\epsilon \cdot (x, y, z) \to (x, y, \epsilon z)$.

L'ensemble des points fixes pour l'action de G correspond à la courbe C par construction, C n'est pas rationnelle. Mais si G agit sur $\mathbb{A}^2$ l'action est linéarisable et de plus l'ensemble des points fixes devrait être rationnel. En particulier si on considère le point $p = (1, 0, 0) \in S$, ce point est fixe pour l'action de G, mais il n'existe pas de voisinage ouvert G-invariant de p qui soit isomorphe de manière équivariante à un ouvert G-invariant de $\mathbb{A}^2$ et tel que G admette une représentation sur le plan affine.

Cependant il existe un ouvert U de $\mathbb{A}^2$ qui peut être muni d'une G-action tel que U soit isomorphe de manière équivariante à un voisinage G-invariant de p dans S.

Posons $u = z + y$ et $v = z - y$. Alors S est donnée par l'équation $\{uv - x^3 + 1 = 0\} \in \mathbb{A}^3$. On considère l'ouvert $V_1 = S \backslash \{1 + x + x^2 = u = 0\}$, qui est isomorphe à $\mathbb{A}^2$ avec coordonnées u et $v/(1 + x + x^2) = (x - 1)/u = w$ alors $V = S \backslash \{1 + x + x^2 = 0\}$ est un ouvert de V_1 stable par G et qui contient le point p.

En effet on a $x = uw+1$ ainsi l'anneau des fonctions régulières sur V est donné par :

$$\mathbb{C}\left[u, w, \frac{1}{(uw+1)^2 + uw + 1 + 1}\right] = \mathbb{C}\left[u, w, \frac{1}{(uw)^2 + 3uw + 3}\right].$$

L'action de $\tau \in G$ l'élément non trivial sur V est ainsi déterminé par :

$$\tau(u) = w((uw)^2 + 3uw + 3); \quad \tau(w) = u((uw)^2 + 3uw + 3)^{-1}.$$

Une variété G-faiblement uniformément rationnelle est uniformément rationnelle. Avec cette nouvelle définition, deux questions apparaissent naturellement.

i) Pour une G-variété X, avec G un groupe réductif connexe, il y a-t-il équivalence entre uniformément rationnelle et G-faiblement uniformément rationnelle ?

En effet, le fait que X soit uniformément rationnelle donne une collection d'ouverts et des isomorphismes de ces ouverts vers des ouverts de l'espace affine. Dans le même temps par le théorème de Sumihiro [Su], on sait que pour tout point $x \in X$, il existe un ouvert affine G-invariant de X contenant x. Il faut donc déterminer si ces deux collections d'ouverts peuvent fournir les ouverts voulus.

ii) Si on considère une action d'un tore $\mathbb{T}$ sur un ouvert abstrait U d'un espace affine $\mathbb{A}^n$, l'action de $\mathbb{T}$ s'étend-elle toujours en une action de $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{A}^n$?

Dimension de Kodaira et recouvrement cycliques

Soit X une variété de Koras-Russell construite comme dans §3.2 alors des conditions sont énoncées [K-R, proposition 6.5] pour que la variété possède une dimension de Kodaira égale à 2. Ces conditions sont $\alpha_2 \gg 0$, $\alpha_3 \gg 0$ et $\alpha_1 \geq a_1\alpha_2\alpha_3$, une remarque est donnée après cette proposition dans l'article, les auteurs déclarent que ces conditions ne sont pas optimales et qu'il doit être possible de déterminer les valeurs exactes de α_2, α_3 et α_1. Cependant cette remarque n'est pour le moment pas exploitée entièrement, une première étape est réalisée par Russell dans [R2], il donne la dimension de Kodaira des recouvrements cycliques du plan affine. On peut supposer que certaines variétés de Koras-Russell ne sont pas $\mathbb{G}_m$-uniformément rationnelles car leur dimension de Kodaira vaut 2. Ainsi déterminer avec précision les valeurs de α_2, α_3 et α_1 pourrait permettre de raffiner la classification déjà existante.

Bibliographie

[A-H] K. Altmann, J. Hausen. Polyhedral divisors and algebraic torus actions. Math. Ann. 334 (2006), no. 3, 557–607.

[A-H-Sü] K. Altmann, J. Hausen, H. Süss. Gluing affine torus actions via divisorial fans. Transform. Groups 13 (2008), no. 2, 215–242.

[Ab-M] S. Abhyankar, T. Moh. Embeddings of the line in the plane. J. Reine Angew. Math. 276 (1975), 148–166.

[Ar-Pe-Sü] I. Arzhantsev, A. Perepechko, H. Süss. Infinite transitivity on universal torsors. J. Lond. Math. Soc. (2) 89 (2014), no. 3, 762–778.

[B1] A. Białynicki-Birula. Algebraic quotients. Torus actions and cohomology. The adjoint representation and the adjoint action. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 131. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, II. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[B2] A. Białynicki-Birula. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n. II. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 1966 177–181.

[Be-H] F. Berchtold, J. Hausen. GIT equivalence beyond the ample cone. Michigan Math. J. 54 (2006), no. 3, 483–515.

[Bo-Bö] F. Bogomolov, C. Böhning. On uniformly rational varieties. arXiv :1307.0102

[Bod-Hau-S-Vi] G. Bodnár, H. Hauser, J. Schicho, O. Villamayor U. Plain varieties. Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 6, 965–971.

[C-L-Sc] D. Cox, J. Little, H. Schenck. Toric varieties. Graduate Studies in Mathematics, 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[Ch-Di] A. D. R. Choudary, A. Dimca. Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces. Kodai Math. J. 17 (1994), no. 2, 171–178.

[D] M. Demazure. Anneaux gradués normaux. Introduction à la théorie des singularités, II, 35–68, Travaux en Cours, 37, Hermann, Paris, 1988.

[Di] A. Dimca. Hypersurfaces in $\mathbb{C}^{2n}$ diffeomorphic to $\mathbb{R}^{4n-2}$ $(n \geq 2)$. Max-Planck Institute, preprint, 1991.

[Do] I. Dolgachev. Lectures on invariant theory. London Mathematical Society Lecture Note Series, 296. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Du] A. Dubouloz. Quelques remarques sur la notion de modification affine. arXiv :math/0503142 .

[E] D. Eisenbud. Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[E-Ha] D. Eisenbud, J. Harris. The geometry of schemes. Graduate Texts in Mathematics, 197. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Es-V] H. Esnault, E. Viehweg. Lectures on vanishing theorems. DMV Seminar, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[F-Z1] H. Flenner, M. Zaidenberg. Normal affine surfaces with $\mathbb{C}^*$-actions. Osaka J. Math. 40 (2003), no. 4, 981–1009.

[F-Z2] H. Flenner, M. Zaidenberg. On the uniqueness of $\mathbb{C}^*$-actions on affine surfaces. Affine algebraic geometry, 97–111, Contemp. Math., 369, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Fu] W. Fulton. Introduction to toric varieties. Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[Fr] G. Freudenburg. Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 136. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[G-K-R] R. Gurjar, M. Koras, P. Russell. Two dimensional quotients of $\mathbb{C}^n$ by a reductive group. Electron. Res. Announc. Math. Sci. 15 (2008), 62–64.

[Gr] M. Gromov. Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 4, 851–897.

[Gu] A. Gutwirth. The action of an algebraic torus on the affine plane. Trans. Amer. Math. Soc. 105 1962 407–414.

[EGA] A. Grothendieck. Eléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 4 1960 228 pp.

[H] J. Hausen. Producing good quotients by embedding into toric varieties. Geometry of toric varieties, 193–212, Sémin. Congr., 6, Soc. Math. France, Paris, 2002.

[Har] R. Hartshorne. Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[I-V] N. Ilten, R. Vollmert. Upgrading and downgrading torus actions. J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), no. 9, 1583–1604.

[K-R] M. Koras,P. Russell. Contractible threefolds and $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$. J. Algebraic Geom. 6 (1997), no. 4, 671–695.

[Kam-R] T. Kambayashi, P. Russell. On linearizing algebraic torus actions. J. Pure Appl. Algebra 23 (1982), no. 3, 243–250.

[Ka] S. Kaliman. Smooth contractible hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ and exotic algebraic structures on $\mathbb{C}^3$. Math. Z. 214 (1993), no. 3, 499–509.

[Ka-Z] S. Kaliman, M. Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. Transform. Groups 4 (1999), no. 1, 53–95.

[Ka-ML1] S. Kaliman, L. Makar-Limanov. On the Russell-Koras contractible threefolds. J. Algebraic Geom. 6 (1997), no. 2, 247–268.

[Ka-ML2] S. Kaliman, L. Makar-Limanov. AK-invariant of affine domains. Affine algebraic geometry, 231–255, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[Ka-K-ML-R] S. Kaliman, M. Koras, L. Makar-Limanov, P. Russell, $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$ are linearizable. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997), 63–71.

[Ke-Kn-Mu-S] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat . Toroidal embeddings. I. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Kr-Pet-Ra] H. Kraft, T. Petrie, J. Randall. Quotient varieties. Adv. Math. 74 (1989), no. 2, 145–162.

[Ku-Mu] M. Kumar, P. Murthy. Curves with negative self-intersection on rational surfaces. J. Math. Kyoto Univ. 22 (1982/83), no. 4, 767–777.

[Mi] M. Miyanishi. Open algebraic surfaces. CRM Monograph Series, 12. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[M-J] L. Moser-Jauslin. Automorphism groups of Koras-Russell threefolds of the first kind. Affine algebraic geometry, 261–270, CRM Proc. Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[Mu] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan. Geometric invariant theory. Third edition. Results in Mathematics and Related Areas , 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[O] T. Oda. Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Results in Mathematics and Related Areas , 15. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Ra] C. P. Ramanujam. A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety. Ann. of Math. (2) 94 1971 69–88.

[Ro] M. Rosenlicht. A remark on quotient spaces. An. Acad. Brasil. Ci. 35 1963 487–489.

[R1] P. Russell. Gradings of polynomial rings. Algebraic geometry and its applications (West Lafayette, IN, 1990), 365–373, Springer, New York, 1994.

[R2] P. Russell. Multiple planes ramified over one-place curves. Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000), 673–685, Springer, Berlin, 2004.

[S] T. Springer. Linear algebraic groups. Second edition. Progress in Mathematics, 9. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[Su] H. Sumihiro. Equivariant completion. J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 1–28.

[T] M. Thaddeus. Geometric invariant theory and flips. J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), no. 3, 691–723.

[tD1] T. tom Dieck. Hyperbolic modifications and acyclic affine foliations. www.uni-math.gwdg.de/tammo/preprints/preprints.html.

[tD2] T. tom Dieck. Ramified coverings of acyclic varieties. www.uni-math.gwdg.de/tammo/preprints/preprints.html.

[tD3] T. tom Dieck. Algebraic topology. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Z] M. Zaidenberg, Lectures on exotic algebraic structures on affine spaces. arXiv :math/9801075