TD10 : Développements limités et applications.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

1. Déterminer le domaine de définiton de f noté $\mathcal{D}_f$.
2. (a) Déterminer le $DL_2(0)$ de f.
   (b) En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.
3. Étudier la position relative au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.

Exercice 2 Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. (a) Montrer que le $DL_3(0)$ de g est donnée par $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{24}x^3 + x^3\epsilon_0(x)$.
   (b) En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $x = 0$.
3. Étudier la position relative au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_g$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.

Exercice 3 En utilisant les développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$
2. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Exercice 4 On considère la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_h$.
2. Établir le tableau de variations de h.
3. (a) Donner le $DL_1(+\infty)$ et le $DL_1(-\infty)$ de h.
   (b) En déduire l'équation des asymptotes $\mathcal{T}_\infty$ et $\mathcal{T}_{-\infty}$ à $\mathcal{C}_h$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
4. Étudier la position relative au voisinage de l'infini de $\mathcal{C}_h$ par rapport à $\mathcal{T}_\infty$ et $\mathcal{T}_{-\infty}$.
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_h$, de T_∞ et $T_{-\infty}$.

Exercice 5 Soit k la fonction définie par $k(x) = \ln(1 + \ln(1+x))$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_k = \left]\dfrac{1}{e} - 1, +\infty\right[$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_k$.
3. (a) Déterminer le $DL_2(0)$ de k.
   (b) En déduire l'équation $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_k$ en $x = 0$.
   (c) Étudier la position relative au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{k(x) - x}{x^2}$.