TD11 : Probabilités. Variables aléatoires à densité.

Exercice 1 Soit $X \sim \mathcal{U}([1,4])$.

1. (a) Déteminer la densité f_X de X puis calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq \frac{3}{2})$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.
2. On pose $Y = e^X$.
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par Y).
   (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y puis en déduire la densité f_Y.
   (c) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un projecteur situé au point O et un mur vertical modélisé par les points $(1, x)$ où $x \in \mathbb{R}$. Le projecteur émet un rayon lumineux faisant un angle aléatoire A avec l'axe des abscisses uniformément entre $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. On note X la variable aléatoire donnant l'ordonnée du point lumineux sur le mur.

1. Représenter schématiquement la situation.
2. Déterminer la loi de A
3. (a) Exprimer X en fonction de A puis déterminer $X(\Omega)$.
   (b) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
   (c) En déduire la densité de X.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire de densité $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. Donner le domaine de définition puis calculer la dérivée de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
2. Soient a et b deux réels. Déduire de la question précédente $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.
3. On pose à présent $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

   (a) Étudier les variations de ϕ puis dresser le tableau de variations complet de ϕ.
   (b) Justifier que ϕ admet une réciproque $\phi^{-1} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que pour tout $y \in]-1,1[$, $\phi^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.
4. Considérons la variable aléatoire $Y = \phi(X)$.
   (a) Préciser $Y(\Omega)$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y puis en déduire la densité de Y.
   (c) Reconnaître la loi de Y.