

TD12 : PROBABILITÉS. THÉORÈME CENTRAL LIMITE.

Exercice 1 On considère une route de longueur L joignant deux villes A et B . Un incendie survient de façon aléatoire uniformément sur cette route mais heureusement il y a une caserne de pompiers située entre A et B , à une distance p de A . On notera X la variable aléatoire qui donne la distance entre la ville A et l'incendie puis on fixera un repère d'origine A .

1. Quelle est la loi de X ?
2. On note Y la distance entre la caserne et l'incendie.
 - (a) Exprimer Y en fonction de X .
 - (b) Calculer la distance moyenne que doivent parcourir les pompiers pour atteindre l'incendie.
 - (c) Montrer que la valeur de p optimale est $\frac{L}{2}$ (valeur pour laquelle la distance entre la caserne et l'incendie est minimale).

Exercice 2 Vous adapterez la rédaction de cet exercices aux autres du même type. 15% des personnes qui ont réservé une place pour un vol ne viennent pas. Pour ne pas perdre trop d'argent, certaines compagnies aériennes ont donc mis en place le surbooking qui consiste à vendre plus de billets qu'il n'y a de places dans l'avion. Une compagnie aérienne accepte 120 réservations.

1. On note X_i la var qui vaut 1 si le i -ième passager se présente, 0 sinon. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
 - (a) Quelle est la loi de X_i ?
 - (b) Que représente S_n ? Quelle est sa loi ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 90 personnes présentes sur le vol. *Indication : Utiliser, en le justifiant, le théorème central limite.*
3. Sur un vol de 100 places, combien doit-on accepter de réservations afin qu'il ait au moins 90% de clients satisfaits?

Exercice 3 On souhaite organiser un planning des entretiens de recrutement dans une école d'ingénieurs pour laquelle 250 candidats sont retenus. Les autres années, 10% des personnes convoquées ne viennent pas à l'entretien.

1. Calculer la probabilité que moins de 230 candidats se présentent à l'entretien.
2. On suppose que le jury ne peut interroger que 70 candidats par jour. Combien doit-il convoquer d'étudiants afin d'être sûr à 90% que tous les candidats soient interrogés ?

Exercice 4 Une société d'assurance A doit assurer 100 véhicules identiques à 10 000€ chacun. Sur un an, la probabilité pour qu'un véhicule soit accidenté et irréparable est de $p = 0,01$. Les accidents sont supposés indépendants. On suppose que A doit payer le 31 décembre tous les sinistres de l'année (remboursement intégral des voitures accidentées).

1. A combien doit s'élever la réserve financière de la société d'assurance A pour qu'elle puisse indemniser tous les sinistres dans 99% des cas ?
2. Une autre société d'assurance B effectue le même travail que A mais pour 100 autres véhicules. La fusion des entreprises A et B est-elle intéressante financièrement ? *Indication : calculer la réserve financière dont les deux sociétés fusionnées auraient besoin pour 200 véhicules.*