TD1 : Techniques de calcul vectoriel.

Exercice 1 Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (R.O.N.). On considère les vecteurs

$$\vec{u} = (-2, 3) \text{ et } \vec{v} = (0, -2).$$

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et $3\vec{u} - 5\vec{v}$.
3. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
4. Donner les coordonnées de $\vec{\tilde{u}}$ (resp. $\vec{\tilde{v}}$), vecteur normalisé (ou unitaire) de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).
5. (a) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.
   (b) En déduire la nature de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Exercice 2 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une B.O.N (base othornormée) de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \vec{l} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1. Justifier que $\mathcal{B}_1 = (\vec{k}, \vec{l})$ est une B.O.N directe.
2. Déterminer graphiquement les coordonnées de $\vec{u} = (-1, -1)$ et de $\vec{v} = (0, \sqrt{2})$ dans $\mathcal{B}_1$.

Exercice 3 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'une B.O.N $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les vecteurs

$$\vec{u} = (0, 1, 1), \vec{v} = (1, 0, 1) \text{ et } \vec{w} = (1, 1, 0).$$

1. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{w}.\vec{u}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.
3. Déterminer les angles que font ces vecteurs deux à deux.

Exercice 4 Soient les vecteurs

$$\vec{u} = (3, 1, -2), \vec{v} = (2, 0, 1) \text{ et } \vec{w} = (1, -1, 4).$$

1. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{w}$ et $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
2. Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, $\vec{u} \wedge \vec{u}$ et $\vec{w} \wedge \vec{u}$.

Exercice 5 On considère trois points de $(\mathbb{R}^3, \mathcal{R})$:

$$A(1, -1, 0), B(0, 1, 1) \text{ et } C(0, 0, -1).$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ qui passe par A, B et C.
2. Soit $M(1, 2, 3) \in (\mathbb{R}^3, \mathcal{R})$. Calculer $d(M, \mathcal{P})$.

Exercice 6 On considère trois points de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$: $A(1, 0)$, $B(2, 2)$ et $C(4, 0)$. On considère le parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'aire du parallélogramme :
   (a) avec le produit vectoriel,
   (b) en utilisant la projection de vecteur.

Exercice 7 Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ on a :

$$(\vec{u}.\vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$