TD2 : Calcul vectoriel. Applications.

Exercice 1 Dans une B.O.N $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \text{ et } \vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

1. Calculer leur norme, leur produit scalaire et leur produit vectoriel.
2. Déterminer la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

Exercice 2 Déterminer dans chaque cas la distance du point M_i à la droite $(\mathcal{D}_i)$.

1. $M_1(1, -1, 3)$ et $\mathcal{D}_1$ est définie par $A(1, 0, -1)$ et $\vec{u} = (1, -2, 1)$,
2. $M_2(2, 1, -1)$ et $\mathcal{D}_2$ est définie par $3x + 2y - z = 7$ et $x + 3y + z = 0$.
3. $M_3(-2, 1, 3)$ et $\mathcal{D}_3$ est définie par $x = 1$ et $y = 6 + t$ et $z = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit la droite $\mathcal{D}$ définie par

$$\begin{cases} x &= y + 1 \\ z &= y \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par $A(1, 1, 1)$.

Exercice 4 Soient $A(1, 1)$, $B(3, 7)$ et $C(-1, 3)$ trois points du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de chaque médiatrice du triangle ABC.
2. En déduire une équation cartésienne du cercle circonsrit à ABC.

Exercice 5 On considère un triangle ABC de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ.

1. Montrer que
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \text{ (formule d'Al-Kashi).}$$
Indication : Utiliser la relation de Chasles.
2. Montrer que l'aire du triangle est $\frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$. *Indication : considérer l'aire d'un parallélogramme.*
3. Montrer que :
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}.$$

Exercice 6 On rappelle que la sphère de centre $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

1. Démontrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$
est une sphère $\mathcal{S}$ dont vous préciserez le centre et le rayon.
2. Démontrez que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 2y - z - 7 = 0$ est tangent à $\mathcal{S}$ puis précisez les coordonnées du point de contact.