TD3 : Trigonométrie.

Exercice 1

1. Simplifier les expressions : $\sin(3\pi)$; $\cos(19\pi)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; $\cos\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$.
2. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$:
   (a) $\cos(x+\pi)$; $\sin(x+\pi)$; $\cos(x-\pi)$; $\sin(x-\pi)$; $\cos(\pi-x)$; $\sin(\pi-x)$
   (b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Exercice 2 Formules de duplication et application

1. (a) Compléter $\cos(a+b) = \ldots$; $\cos(a-b) = \ldots$; $\sin(a+b) = \ldots$; $\sin(a-b) = \ldots$
   (b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. *Indication :* $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1.$$
   (b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. (a) Sans se soucier du domaine de définition, montrer que :
   $$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$
   En déduire une formule de dupplication pour $\tan(a-b)$.
   (b) Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :
$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta).$$

Exercice 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = 0$
3. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(3x) = \sin(x)$
2. $\sin(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$
3. $\sin(5x) + \sin(3x) = 0$
4. $\tan(x) = 1$.

Exercice 6 Linéariser en utilisant les formules d'Euler :

1. $\cos^2(x)$; $\sin^2(x)$
2. $\cos^3(x)$; $\sin^3(x)$.

Exercice 7 *Les questions sont indépendantes.*

1. Sachant que $\cos(x) = \frac{1}{4}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, calculer $R = \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $T = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.