TD5 : Polynômes.

Exercice 1 Déterminer la division euclidienne de A par B.

1. $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X + 1$
2. $A = X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ et $B = X^2 - 3X + 1$
3. $A = X^5 - X^2 + 2$ et $B = 1 + X^2$
4. $A = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 4X - 4$ et $B = (X + 2)^2$
5. $A = X^n - 1$ et $B = X - 1$ *Indication : Récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

1. Soit $P = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que 1 est racine de P.
   (b) En déduire la factorisation en produit d'irréductibles de P sur $\mathbb{R}$.
2. Factoriser en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :
   (a) $Q = X^3 - X^2 + 2X - 2$
   (b) $R = X^3 + X^2 - 4X - 4$
   (c) $S = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 5X + 1$
   (d) $T = X^4 - 10X^2 + 25$

Exercice 3 *Les questions sont indépendantes.*

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Démontrer que $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ est divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 4 Effectuer la division selon les puissances croissantes de A par B.

1. $A = 1 + X$ et $B = 1 - X$ à l'ordre $p = 2$
2. $A = 2 + X^2$ et $B = 1 - X + 3X^2$ à l'ordre $p = 3$
3. $A = X^2 + 3X^3 + X^4 + X^5$ et $B = 1 + X$ à l'ordre $p = 4$.

Exercice 5 *Les questions sont indépendantes.*

1. On considère le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
   (a) Montrer que P admet une racine double.
   (b) En déduire la factorisation en produit d'irréductibles de P sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels.
   (a) Déterminer tous les polynômes $P = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$ ayant une racine de multiplicité 3.
   (b) Factoriser chacun des polynômes trouvés.

Exercice 6 Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P = X^3 - 3iX^2 + (2i - 3)X + 2 + i$.