

TD 6 : POLYNÔMES. APPLICATIONS.

Exercice 1 Résoudre dans \mathbb{R} les équations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 - x - 1 = 0$
2. $5x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0$
3. $x^3 - 2x + 4 = 0$
4. $-x^2 + 5x + t = 0$ où $t \in \mathbb{R}$
5. $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$.

Exercice 2 Étudier le signe des fonctions suivantes :

1. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 7x + 6$.
2. g est définie sur $[0, 2\pi]$ par $g(x) = \cos^2(x) - \cos(x) - 2$.

Exercice 3 Étudier les fonctions polynômiales suivantes (tableau de variations complet et allure de la courbe) :

1. f est définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$
2. g est définie par $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$.

Exercice 4 Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f_i définies par :

1. $f_1(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$; $f_2(x) = \sqrt{x^2+2x-15}$; $f_3(x) = \sqrt{x^2+5}$
2. $f_4(x) = \ln(x^3+x+2)$; $f_5(x) = \frac{1}{\ln(3-7x)}$; $f_6(x) = \ln((x+1)^4 - (x-1)^4)$.

Exercice 5 Résoudre sur \mathbb{R} les équations trigonométriques suivantes :

1. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$
2. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$.

Exercice 6 Soient $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un R.O.N du plan.

1. Soient $A(0, -1)$, $B(-1, 1)$ et $C(-2, 9)$ trois points du plan. Déterminer la fonction polynômiale de degré 2 qui passe par A , B et C .
2. Soient $A(x, 3)$, $B(2, 7)$ et $C(2 - x, 1)$ où $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{OC} est aigu.

Exercice 7

1. On considère la famille de fonctions polynômiales à paramètre $m \in \mathbb{R}$ définie par :

$$Q_m(x) = (m - 2)x^3 - (m + 5)x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{15}{4}.$$

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de Q_m passe-t-il par le point $M = (-1, 2)$?
- (b) Montrer que $\frac{5}{2}$ est une racine de multiplicité 2.

2. On considère la famille de fonctions polynômiales à paramètre $a \in \mathbb{R}$ définie par:

$$T_a(x) = x^3 + (2 - 2a)x^2 + a(a - 4)x + 2a^2.$$

- (a) Montrer que a est racine de T_a de multiplicité au moins 2.
- (b) Factoriser T_a puis en déduire la dernière racine de T_a .