TD7 : Fonctions et techniques de calcul.

Exercice 1 On considère les fonctions f, g, h et k définies par :

$$f(x) = x^2,\ g(x) = x + 3,\ h(x) = e^x \text{ et } k(x) = \sqrt{x^3 + 1}.$$

1. Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ k$ et $k \circ h$.
2. Écrire k comme la composée de deux fonctions.
3. Calculer k', $(k \circ h)'$ puis $(h \circ k)'$. Vous utiliserez la formule de dérivée d'une composée.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance, notée x^α par :

$$x \mapsto \alpha \ln(x) \mapsto \exp\big(\alpha \ln(x)\big).$$

1. Déterminer le domaine de définition de x^α.
2. Déterminer la dérivée de x^α.

Exercice 3 Calculer les dérivées des fonctions f_i définies par :

1. $f_1(x) = 3tx^3 + 1$; $f_2(t) = 3tx^3 + 1$; $f_3(x) = x\ln(x)$; $f_4(t) = \dfrac{e^t}{t}$
2. $f_5(x) = \ln(5x^2 - 3x + 1)$; $f_6(x) = \dfrac{x-2}{t(x+3)}$; $f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$; $f_8(x) = e^{\cos(x)}$
3. $f_9(x) = \sin(x^3)$; $f_{10}(x) = \big(\cos(x^2+1)\big)^4$; $f_{11}(t) = \big(\ln(5+t)\big)^{\frac{1}{2}}$; $f_{12}(x) = e^{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}$.

Exercice 4 *Les questions sont indépendantes.*

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$
   (b) $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = 0$.
2. On considère les fonction ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
   (a) Montrer que ch est paire sur $\mathbb{R}$ et que sh est impaire sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer par récurrence que $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ puis que $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Démontrer par récurrence que $\ln(1+x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Exercice 6 Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque $g :]-\infty, 0[\longrightarrow]1, +\infty[$.
2. Justifier que pour tout réel $t < 0$, $g(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$.
3. Représenter sur un même graphique f et g.