Calculs Vectoriels.

Exercice 1 Construction de vecteurs

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$, on considère $\vec{u} = (0, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2)$.

1. Représenter le repère, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Représenter $\vec{u} + \vec{v}$ graphiquement (puis vérifier algébriquement).
3. Même question pour $3\vec{u}$, $-2\vec{v}$, $\vec{v} - \vec{u}$.
4. Représenter un vecteur normalisé (ou *unitaire*) de $\vec{v}$.

Exercice 2 Produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$, on considère $\vec{u} = (3, -1)$ et $\vec{v} = (-6, 2)$.

1. Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot (-\vec{u})$, $\vec{u} \cdot (2\vec{u})$.
2. Calculer les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, en déduire la valeur du cosinus de l'angle entre eux.
3. Que peut-on en déduire ? Retrouver le résultat en faisant un dessin.

Exercice 3 Vecteurs à paramètres

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs à paramètre t : $\vec{u}(t) = (1, t), \vec{v}(t) = (2t, 1 + t)$.

1. Construire graphiquement ces deux vecteurs pour $t = 0, t = 1$ puis $t = -1$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de t les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont-ils orthogonaux ? Représenter ce(s) cas sur le graphique.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de t le vecteur $\vec{u}(t)$ est colinéaire au vecteur $(-2, 4)$?

Exercice 4 Base orthonormale

Parmi les bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes, dire lesquelles sont orthonormales.

1. $\{(1, 2), (-2, 1)\}$
2. $\{(0, 2), (-1, 0)\}$
3. $\{(0, 1), (-1, 0)\}$
4. $\{(1, 1), (1, -2)\}$

Exercice 5 Changement de base

Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient deux vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (6, 3, 2)$.

1. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j}, -\vec{k})$.
2. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(2\vec{k}, \vec{j} - \vec{i}, \vec{i} + \vec{k})$.

Exercice 6 Produit vectoriel

Soient des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (-1, 2, 0)$.

1. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge -\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{u}$.
2. Faire une représentation graphique de chacun des résultats obtenus ci-dessus.
3. Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de norme respective 3 et 4, et tels que l'angle qui les sépare est $\frac{2\pi}{3}$. Donner alors la norme
$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|.$$

Exercice 7 Parallélogramme

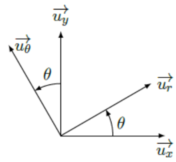
Soient trois points $A(1,0)$, $B(2,2)$ et $C(4,0)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère le parallélogramme généré par les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$.

1. Faire un dessin.
2. Calculer l'aire du parallélogramme.

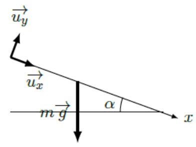
Astuce : calculer d'abord les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur (AC).

Exercice 8 Projections

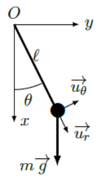
1. Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ en fonction de θ, $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$.



2. On considère la situation ci-contre.
   Le vecteur $m\vec{g}$ est un vecteur de norme mg.
   Exprimer le vecteur $m\vec{g}$ en fonction de mg,α $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$.



3. On considère la situation ci-contre.
   Le vecteur $m\vec{g}$ est un vecteur de norme mg.
   Exprimer le vecteur $m\vec{g}$ en fonction de mg,θ, $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$.



Exercice 9

On considère les transformations de bases suivantes :

$$\beta_0 = (\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \xrightarrow[Rotation/z_0,\ angle\ \theta]{} \beta_1 = (\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}) \xrightarrow[Rotation/z_1,\ angle\ \phi]{} \beta_2 = (\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$$

1. Donner les figures planes (cadrans) permettant de voir les transformations de bases.
2. Quelle est la transformation $\beta_0 \to \beta_2$?
3. Exprimer $\vec{y_0}$ dans la base β_2.
4. Exprimer $\vec{x_2}$ dans la base β_0.

Exercice 10

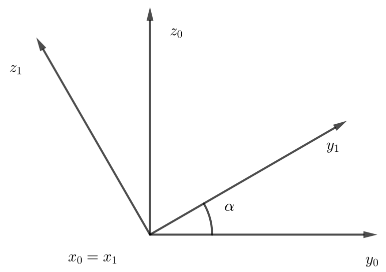
On considère les transformations de bases suivantes :

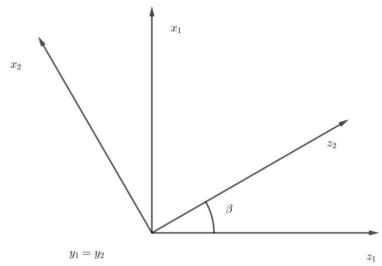
$$\beta_0 = (\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \xrightarrow[Rotation/z_0,\ angle\ \theta]{} \beta_1 = (\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}) \xrightarrow[Rotation/y_1,\ angle\ \phi]{} \beta_2 = (\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$$

1. Donner les figures planes (cadrans) permettant de voir les transformations de bases.
2. Exprimer $\vec{y_1}$ dans la base β_0.
3. Exprimer $\vec{y_1}$ dans la base β_2.
4. Exprimer $\vec{y_2}$ dans la base β_0.

Exercice 11

On considère les cadrans suivants les bases β_0, β_1 et β_2 étant obtenues par des rotations successives.





1. Donner les résultats des produits scalaires suivants :
   - $\vec{x_2} \cdot \vec{z_1} =$
   - $\vec{x_1} \cdot \vec{y_1} =$
   - $\vec{y_1} \cdot \vec{z_0} =$
   - $\vec{y_2} \cdot \vec{z_0} =$
2. Donner les résultats des produits vectoriels suivants :
   - $\vec{y_1} \wedge \vec{z_1} =$
   - $\vec{x_1} \wedge \vec{z_1} =$
   - $\vec{y_0} \wedge \vec{x_2} =$
   - $\vec{y_2} \wedge \vec{z_1} =$
3. Donner l'expression de :
   - $\vec{\Omega}(1/R_0) =$
   - $\vec{\Omega}(2/R_0) =$
4. Donner l'expression de :
   - $\frac{d}{dt}(\vec{y_1})_{R_0} =$
   - $\frac{d}{dt}(\vec{z_2})_{R_0} =$

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une B.O.N directe :

1. Mettre en coordonnées polaires : $\vec{u} = (0, -7)$; $\vec{v} = (3, -3)$; $\vec{w} = (2\sqrt{3}, 2)$.
2. Mettre en coordonnées cartésiennes : $\vec{u} = \left(5, \frac{3\pi}{4}\right)$; $\vec{v} = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right)$.
3. On considère les vecteurs $\vec{u} = (2, 2)$ et $\vec{v} = (3, -3\sqrt{3})$.
   (a) Déterminer $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.
   (b) En déduire $\vec{u}.\vec{v}$.

Exercice 13 On munit $\mathbb{R}^2$ d'une B.O.N directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. On considère $\vec{u} = (-2, 2)$ et $\vec{v} = (3, 1)$. On effectue une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de la base $\mathcal{B}$: on obtient une nouvelle base notée $\mathcal{B}' = (\vec{i'}, \vec{j'})$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ dans $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 14 Dans un R.O.N direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$, on note $A(1, \sqrt{3})$.

1. Calculer les coordonnées polaires de $\overrightarrow{OA}$.
2. B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Calculer les coordonnées polaires de $\overrightarrow{OB}$.

(b) Déterminer les coordonnées cartésiennes de B dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
4. Calculer les coordonnées polaires de $\overrightarrow{OI}$.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

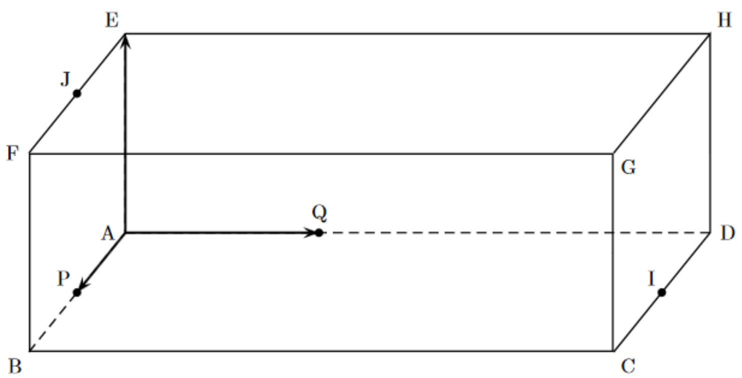
Exercice 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les points A,B et C ont pour coordonnées respectives : $A(1, -2, 4)$, $B(-2, -6, 5)$ et $C(-4, 0, -3)$

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1, -1, -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation du plan (ABC).
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   (b) Déterminer les coordonnées du point O?, projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\vec{BH} = t.\vec{BC}$.
   (a) Démontrer que $t = \frac{\vec{BO}.\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$.
   (b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Exercice 16

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $AE = 1$. On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[EF]$ et $[AB]$. On note Q le point défini par $\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AD}$.



On appelle **plan médiateur** d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu. L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre $ABIJ$ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \vec{AP}, \vec{AQ}, \vec{AE})$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur(P_1) du segment $[AB]$.
3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
   Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment $[IJ]$.
4. (a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

(b) Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

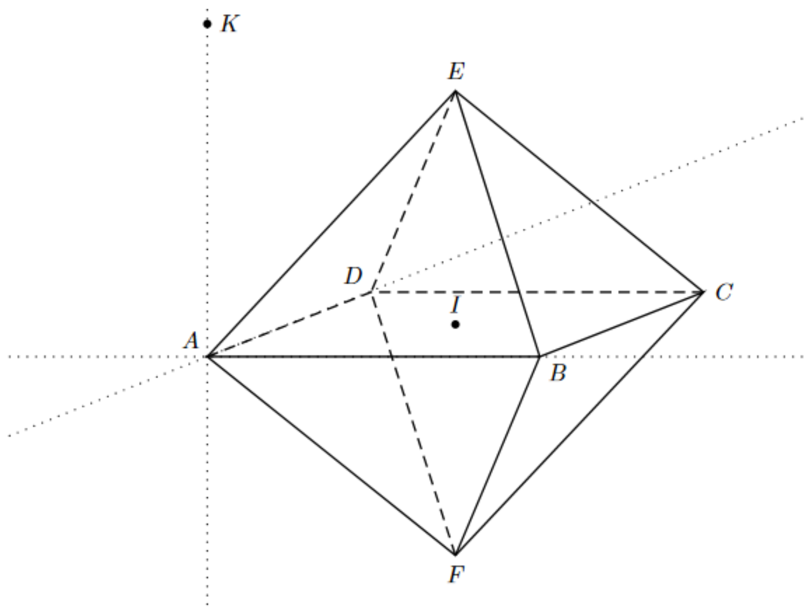
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.

(d) Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABIJ$.

Exercice 17

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I. Toutes les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AK})$.



1. (a) Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.
   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}(0, -2, \sqrt{2})$ est normal au plan (ABE).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).
2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.
   (a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
   (b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).
   (c) Construire la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).