TD2 : Probabilités et Dénombrement.

Exercice 1 Gestion des ressources humaines

Au service des ressources humaines d'une grande entreprise, une étude statistique a montré que: sur 1000 personnes postulant pour un emploi, 8% parlent l'anglais couramment; parmi celles qui parlent l'anglais couramment, 15% ont de solides notions d'informatique; parmi celles qui ne parlent pas anglais couramment, 5% ont de solides notions d'informatique.
Déterminer,dans un tel groupe de 1000 demandeurs d'emploi, le nombre de personnes:

1. possédant simultanément les deux compétences;
2. possédant de solide notions d'informatique sans parler couramment anglais;
3. ne parlant pas couramment l'anglais et ne possédant pas de solides notions d'informatique;
4. ne présentant aucune des deux compétences.

Exercice 2 La tournée du conducteur de travaux
Un conducteur de travaux part de son bureau pour visiter quatre chantiers notés A, B, C et D.

1. Combien y-a-t-il d'ordres théoriques de visites possibles?
2. Combien lui reste-t-il de possibilités s'il doit passer sur le chantier A avant d'aller sur le chantier C, et s'il peut visiter un ou deux chantier entre A et C?

Exercice 3 Digicode.
Un digicode est situé à l'entrée d'un immeuble. Pour ouvrir il faut composer un code formé de 3 chiffres distincts à choisir parmi les chiffres de 1 à 9 puis de deux lettres à choisir parmi A,B,C et D (les lettres ne sont pas elles nécessairement distinctes).

1. Déterminer le nombre de codes possibles.
2. Déterminer le nombre de codes possibles ayant trois chiffres impairs et deux lettres distinctes.
3. Je suis sûre que les chiffres sont 1,2 et 4 (je ne me souviens plus du tout de l'ordre) et qu'il y a au moins un A, combien de codes faut il essayer ?
4. Je suis sûre que le premier chiffre est un 1, que les chiffres sont dans l'ordre croissant et que les lettres sont A puis D. Combien de codes faut il essayer ?

Exercice 4
De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex æquo ?

Exercice 5 Manipulation des factorielles

1. Simplifier les fractions suivantes:

   (a) $\frac{18!}{16!}$ (b) $\frac{30!}{27!3!}$ (c) $\frac{(n+1)!}{n!}$ (d) $\frac{(n+2)!}{n!}$

2. Calculer les nombres réels suivants:

   (a) $\binom{7}{0}$ (b) $\binom{7}{1}$ (c) $\binom{7}{3}$ (d) $\binom{7}{4}$

3. Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

4. Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$,
   $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

Exercice 6 Contrôle de qualité

1. Dans un lot de vingt pièces fabriquées, on en prélève simultanément quatre. Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir?

2. On suppose alors que, sur les vingt pièces, quatre sont mauvaises.
   Quel est le nombre de prélèvement où:

   (a) les quatre pièces sont bonnes?

   (b) au moins une pièce est mauvaise?

   (c) une pièce et une seule est mauvaise?

   (d) deux pièces au moins sont mauvaise?

Exercice 7 Impasses sur les sujets
Un candidat à un examen oral a étudié seulement quatre thèmes de mécanique sur dix possibles et huit thèmes de mathématiques sur douze possibles.
L'épreuve consiste à répondre à une question de mécanique et à une question de mathématiques.

1. Combien y-a-t-il de tels sujets à deux questions?

2. Dans combien de cas le candidat connaît-il les réponses aux deux questions?

3. Dans combien de cas connaît-il seulement la réponse à la question de mécanique? la réponse à celle de mathématiques?

4. Dans combien de cas ignore-t-il les réponses aux deux questions?

Exercice 8 Probabilités conditionnelles

Une usine fabrique des cylindres pour des photocopieurs. On s'intéresse à un stock de cylindres qui ont été fabriqués par deux machines différentes, notées M_1 et M_2.
On suppose que la probabilité qu'un cylindre prélevé au hasard dans la partie du stock constitué par les cylindres fabriqués par la machine M_1 soit défectueux est de $0,002$, et que la probabilité qu'un cylindre prélevé au hasard dans la partie du stock constitué par les cylindres fabriqués par la machine M_2 soit défectueux est de $0,003$.
40% des cylindres de ce stock ont été fabriqués par la machine M_1. On prélève au hasard un cylindre dans le stock.
On définit les événements suivants:
E_1: "le cylindre a été fabriqué par la machine M_1",
E_2: "le cylindre a été fabriqué par la machine M_2",
D: "le cylindre est défectueux".

1. Déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}_{E_1}(D)$ et $\mathbb{P}_{E_2}(D)$.

2. En déduire $\mathbb{P}(D \cap E_1$ et $\mathbb{P}(D \cap E_1$.

3. Calculer $\mathbb{P}(D)$.

4. Déterminer la probabilité que le cylindre ait été fabriqué par la machine M_1 sachant qu'il est défectueux.

Exercice 9

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug au moment d'effectuer le tirage au sort fait remplir le tableau de façon totalement aléatoire, y compris les têtes de séries.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?

2. Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Exercice 10

Une usine fabrique en grande série des pièces susceptibles de présenter deux défauts notés a et b. Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants:

- 5% des pièces présentent le défaut a,
- 4% des pièces présentent le défaut b,
- 1% des pièces présentent les deux défauts.

On prélève une pièce au hasard dans la production. En notant A: "la pièce a le défaut a" et B: "la pièce a le défaut b".

1. (a) Les événements A et B sont-ils indépendants?
   (b) Calculer la probabilité que la pièce possède le défaut a sachant qu'elle possède le défaut b.
2. (a) Déterminer la probabilité que la pièce possède au moins un défaut.
   (b) Déterminer la probabilité que la pièce ne présente aucun défaut.

Exercice 11

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$.
On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.