TD3 : Variables aléatoires discrètes.

Exercice 1 Assurance-vie
Une compagnie d'assurance-vie vend des polices d'assurances-vie à des personnes de quarante-cinq ans, toutes en bonne santé. Après consultation des statistiques des compagnies d'assurances, on admet que la probabilité, de l'événement " une personne de quarante-cinq ans vit encore trente ans" est de $0,7$.
On prélève au hasard six personnes de quarante-cinq ans en bonne santé parmi la clientèle de la compagnie. On admet que la clientèle est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire X qui à chaque échantillon de six personnes de plus de quarante-cinq ans en bonne santé associe les personnes de cet échantillon encore vivantes trente ans après suit une loi binomiale. Préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité des événements suivants:
   (a) "Les six personnes seront vivantes dans trente ans"
   (b) "Au moins deux personnes seront vivantes dans trente ans"
   (c) "Au moins une personne sera vivante dans trente ans".

Exercice 2
X désigne une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et $0,001$.

1. Déterminer n pour que $\mathbb{P}(X = 0) \leq 0,01$.
2. Déterminer n pour que $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,90$.

Exercice 3 On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0,7. On effectue dix lancers successifs,

1. Quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ?
2. Quel est le nombre moyen de lancers réussis ?
3. Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins 1 lancer ait réussi?

Exercice 4 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; \dots; k$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire celles de X_n.

Exercice 5

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche avec remise six boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues et V le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de R et de V.
2. Même question lorsque les tirages sont effectués sans remise.

Exercice 6

1. Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence des résultats. Déterminer les lois de X, $|X|$,X^2.
2. On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.
3. On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X (on pourra commencer par calculer les probabilités $\mathbb{P}(X \leq k)$, ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 7

Soient $X_1, ..., X_n$ vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de $\prod X_i$.

Exercice 8

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 9

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p. On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne ; soir on regroupe les personnes en groupes de n, dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Donner la loi de X.
2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

Exercice 10 Production de pièces pour l'industrie automobile

Une entreprise fabrique en grande quantité un certain type de pièce pour l'industrie automobile.

1. Événements indépendants
   Dans cette partie, on s'intéresse à deux défauts possibles notés a et b. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. On considère les événements suivants:
   - E_1: " la pièce prélevée présente le défaut a".
   - E_2: " la pièce prélevée présente le défaut b".

   On admet que $\mathbb{P}(E_1) = 0,005$ et que $\mathbb{P}(E_2) = 0,02$, on suppose de plus que les événement sont indépendants.

   (a) Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée présente les deux défauts.

   (b) i. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée présente au moins un des deux défauts.

   ii. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée ne présente aucun des deux défauts.

2. Loi binomiale
   On note E l'événement "une pièce prélevé au hasard dans un stock important présente un défaut pouvant affecter la sécurité". On suppose que $\mathbb{P}(E) = 0,01$.
   On prélève au hasard 50 pièce dans un stock pour vérification, le stock étant suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
   On considère X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 pièces associe le nombre de pièce de ce prélèvement qui présentent un défaut pouvant affecter la sécurité.

   (a) Quelle est la loi de X.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(X) = 0$.

(c) i. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement il y ait au plus deux pièces présentant un défaut.

ii. En déduire la probabilité que dans un tel prélèvement il y ait au moins trois pièces présentant un défaut.

Exercice 11

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z?

3. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1+q)$).

4. Démontrer que $\mathbb{P}(Z = l) = \sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = l - k))$.

5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens, en déduire $\mathbb{P}(Z = l)$.

6. Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ l-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}$.
   En déduire que $\mathbb{P}(Z = l) = \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.

7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par Z.

8. Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'un correspondant donné soit joint à l'issue des deux appels.