TD10 : Intégration.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad J=\int_0^3 (x^5+2x)\,\mathrm{d}x \qquad K=\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad M=\int_{-1}^1 (3e^t+1)\,\mathrm{d}t \qquad N=\int_\pi^{2\pi} (\cos(x)-\sin(x))\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

1. Reconnaître la forme composée des intégrandes puis calculer :

$$I=\int_{-1}^1 x^2e^{x^3}\,\mathrm{d}x \qquad J=\int_0^2 \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x+7}}\,\mathrm{d}x \qquad K=\int_2^x \frac{\frac{1}{2}t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

$$L=\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x \qquad M=\int_\pi^{3\pi} \sin(3t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t \qquad N=\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Décomposer en éléments simples puis déterminer :

$$A=\int \frac{t^3}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}x \qquad B=\int \frac{1}{x^3+5x^2+3x-9}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3

1. (a) Rappeler la formule d'intégration par parties.

   (b) Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x \quad J=\int_0^e \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t \quad L=\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. En utilisant le théorème de changement de variables, calculer :

$$I=\int_1^e \frac{(\ln(x))^3}{x}\,\mathrm{d}x\ (u=\ln(x)) \qquad J=\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ (u=\sqrt{x})$$

$$K=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\ (t=\cos(u)) \qquad L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x\ (u=\sin(x)).$$

Exercice 4

1. Montrer que $2\cos^2(t)=1+\cos(2t)$. *Indication : On pourra utiliser la formule d'Euler.*
2. En déduire, en posant $u=\sin(t)$, la valeur de :

$$L=\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 5 Calculer l'intégrale suivante :

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$