TD1 : Calcul matriciel.

Exercice 1 Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer lorsque cela a un sens, les produits : AB, AC, BC, BA, BC et A^2.
2. Montrer que $A^2 - 3A - 10\mathrm{I}_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Exercice 2 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A + B$, $A - B$, $A + \mathrm{I}_3$ et $3A - 2\mathrm{I}_3$.
2. Déterminer AB et BA.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A + B)^2$.

Exercice 3 *Les questions sont indépendantes.*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer $B^2 - 3B + 2\mathrm{I}_3$.
   (b) Soit $n \geq 2$. Déterminer la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
   (c) En déduire B^n en fonction de B et I_3.

Exercice 4 *Les questions sont indépendantes.*

1. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :
$$f(x, y) = (x + 2y, 2x + y).$$
   (a) Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
   (b) Posons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (1, -1)$. Donner $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ puis calculer B^n.
2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :
$$g(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x - y + z, x + 5z).$$
   Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

Exercice 5 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note $s_{\vec{i}}$ (respectivement $s_{\vec{j}}$) la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{i}$ (respectivement par rapport à $\vec{j}$).

1. Déterminer les expressions analytiques de $s_{\vec{i}}$, de $s_{\vec{j}}$ puis de $s_{\vec{j}} \circ s_{\vec{i}}$.
2. Donner $S_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_{\vec{i}})$ et $S_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_{\vec{j}})$.
3. Calculer $S_2 S_1$. Quelle application linéaire représente cette matrice ?
4. Écrire $S_2 S_1$ sous la forme d'une matrice de rotation puis conclure quant à la transformation géométrique représentée par $s_{\vec{j}} \circ s_{\vec{i}}$.