TD5 : Déterminants.

Exercice 1

1. (a) Calculer $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

   (b) En déduire $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse puis $\det(A^{-1})$.

Exercice 2 Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & 11 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 18 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$

Exercice 5 Déterminer sous forme factorisée :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -5 \\ & 2-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \qquad Q(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \qquad R(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Exercice 6 Calculer les déterminants suivants en factorisant le plus possible :

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 Soit θ l'application définie par

$$\theta(x) = \begin{vmatrix} x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & x \end{vmatrix}.$$

1. Justifier que θ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à un.
2. Soient deux réels a et b tels que $a \neq b$. Déduire de la question précédente la valeur de :

$$\begin{vmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}.$$