TD6 : Déterminants et applications.

Exercice 1

1. Déterminer si les familles $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivantes sont des bases des $\mathbb{R}^3$ où :

   (a) $\vec{u} = (-1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$

   (b) $\vec{u} = (5, -2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 3, 1)$

   (c) $\vec{u} = (0, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, 3, 0)$, $\vec{w} = (0, -2, 0)$.

2. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où

$$\vec{u} = (1, 1, t), \vec{v} = (1, t, 1) \text{ et } \vec{w} = (t, 1, 1).$$

   Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$ la famille de vecteurs $\mathcal{C}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Calculer le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède P engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{u_1} = (2, -1, 1), \overrightarrow{u_2} = (3, 1, -1) \text{ et } \overrightarrow{u_3} = (1, 0, 1).$$

Exercice 3 Déteminer si les matrices suivantes sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{S}_m) : \left\{ \begin{array}{ccc} x + my + (m-1)z & = & 0 \\ 3x + 2y + mz & = & 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z & = & m \end{array} \right.$$

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\mathrm{com}(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la matrice dont les coefficients m_{ij} sont :

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

où Δ_{ij} est le déterminant obtenu à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{com}(A)$.

2. On admet que si M est inversible alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{com(M)}$.

   (a) Inverser A avec la formule de la comatrice.

   (b) Inverser $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec la formule de la comatrice.