TD7 : Changements de base et diagonalisation.

Exercice 1 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique $\mathbb{R}^2$. On considère la famille de vecteurs

$$\mathcal{B}' = (f_1, f_2) \text{ où } f_1 = (0,1) \text{ et } f_2 = (-1,0).$$

1. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}$ de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\hookrightarrow\mathcal{B}}$.
   (c) Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ces deux matrices ?
3. Soient $u = (0,1)$, $v = (1,-1)$ (exprimés dans $\mathcal{B}$) et $w = (-1,1)$ (exprimé dans $\mathcal{B}'$).
   (a) Exprimer les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Exprimer les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $\varphi(x,y) = (y,x)$.

1. Donner la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère

$$\mathcal{B}' = (f_1, f_2) \text{ où } f_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } f_2 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

   (a) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}$.
   (b) Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\hookrightarrow\mathcal{B}}$
3. Donner la matrice A' de φ dans $\mathcal{B}'$ puis interpréter géométriquement.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. *But : Diagonaliser A.*

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A noté $P_A(\lambda)$.
   (b) En déduire les valeurs propres de A.
2. Justifier sans calculs que A est diagonalisable.
3. (a) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.
   (b) En déduire une base $\mathcal{B}'$ de diagonalisation de A et donner $P = P_{\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}'}$.
4. Déterminer une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 4 Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $P_M(\lambda)$ puis en déduire les valeurs propres.
2. Déterminer les sous-espaces propres de M.
3. Montrer que M est diagonalisable.
4. Donner une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.