TD8 : Diagonalisation et applications.

Exercice 1 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que M est diagonalisable.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de M.
   (b) En déduire les valeurs propres de M.
3. (a) Déterminer les sous-espaces propres de M.
   (b) En déduire une base de diagonalisation de M.

Exercice 2 On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Justifier que N est diagonalisable.
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de N.
   (b) En déduire les valeurs propres de N. *Indication : $\frac{-1}{2}$ est racine du polynôme caractéristique.*
3. (a) Déterminer les sous-espaces propres de N.
   (b) En déduire une base orthornormale de diagonalisation de N.

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont la représentation dans la base canonique est:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ une expression simple de A^n.

Exercice 4 Soit B la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caratéristique de B et en déduire que B est diagonalisable
2. Écrire B sous la forme $B = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale.
3. Montrer qu'il existe une matrice C telle que $C^3 = B$. *Indication : Chercher d'abord une matrice T telle que $T^3 = D$.*

Exercice 5 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$.
   (c) Calculer A^n. *Indication : Diagonaliser A.*
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.